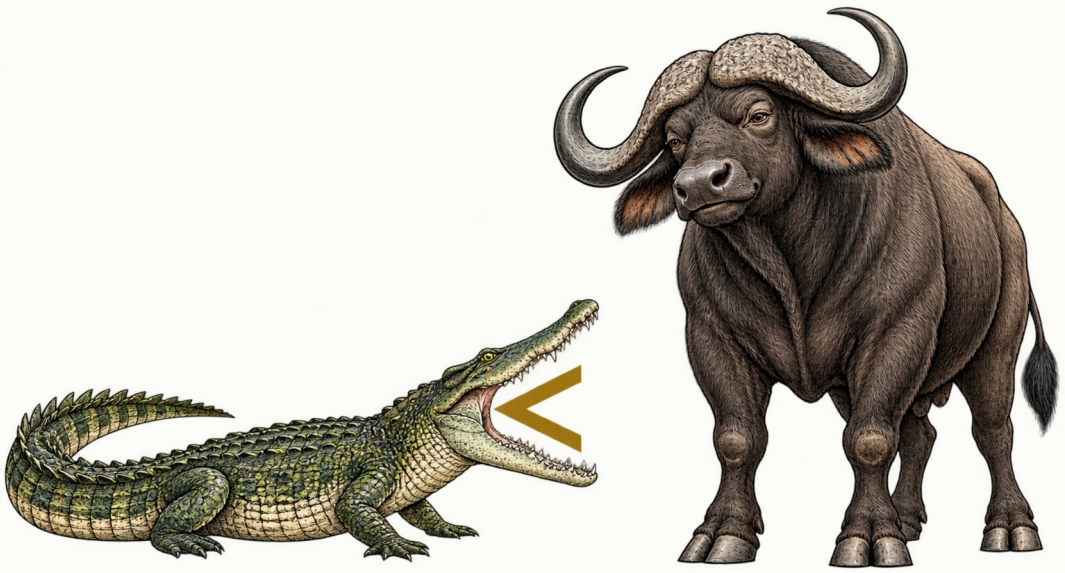
MathExam

МАТЕМАТИКА

Наталья Алябьева

Курс молодого ЕГЭшника

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ



Базовая математика

21 задание, ловушки и приёмы

mathexam.space

КНИЖНАЯ СЕРИЯ MATHEXAM

Подготовка к ЕГЭ 2027 года · редакция от 18 ноября 2026 года

Оглавление

Предисловие....3
Как устроена эта книга....4
Разминка. Закрыть пробелы....6

Часть первая. Практические задачи: математика выходит в люди

Задание 1. Сдача без сдачи позиций....8
Задание 2. Сколько вешать в граммах?....11
Задание 3. Графики, таблицы, два столбца....13
Задание 4. Формула выдаётся бесплатно....17
Задание 5. Шансы есть всегда....20
Задание 6. Тариф «Выгодный»....23
Задание 7. Опознание графиков — 2....26
Задание 8. Верю — не верю....31

Часть вторая. Геометрия: от клеточки до объёма

Задание 9. Клеточка возвращается....34
Задание 10. Геометрия во дворе....38
Задание 11. Коробки, баки и другие объёмы....42
Задание 12. Вся плоская компания в сборе....46
Задание 13. Выход в объём....50

Часть третья. Арифметика и алгебра: старые знакомые

Задание 14. Дроби: финальный сезон....53
Задание 15. Проценты: вклад в аттестат....56
Задание 16. Степени и корни: второй подход к снаряду....59
Задание 17. Икс всё ещё ждёт....62
Задание 18. Крокодил подрос....65

Часть четвёртая. Последние три: задачи с характером

Задание 19. Цифровой детектив....69
Задание 20. Движение, работа и другие приключения....72
Задание 21. Смекалка против шаблона....76
Ответы к рубрике «Проверь себя»....80
Источники для сверки с экзаменом....86

Предисловие, или Зачем эта книга

Меня зовут Наталья Михайловна. Я учитель математики, и два года назад я написала книгу для девятиклассников — про экзамен, крокодила, который ест большее число, и про то, что смешное не бывает страшным. Девятиклассники с тех пор подросли до выпускников. И вместе с ними подросло одно опасное слово.

У девятиклассника это было «надо». У одиннадцатиклассника — «успеется». База же. Лёгкий экзамен. Все сдают. Сяду за неделю, пролистаю, приду и решу.

И вот что я вам скажу как человек, который каждый год проверяет, чем это заканчивается: на лёгком экзамене баллы теряют не потому, что не знают, а потому, что не смотрят. Расслабленный выпускник переводит треть в «примерно 0,33», делит икс-квадрат на икс и теряет ноль, находит оба корня и вписывает не тот, потому что хвост условия — «укажите меньший» — читать было «успеется». Недооценка ворует баллы не хуже страха. Просто страх ворует их дрожащими руками, а недооценка — с ленивой улыбкой.

Поэтому книга снова написана наоборот. Не «соберись, это серьёзно», а «смотри, как устроена каждая из двадцати одной ловушки — и как смешно в них попадаются». Внутри всё по-настоящему: реальные типы заданий, реальные места потери баллов, рабочие приёмы и тренажёр с практикой и самопроверками. Просто рассказано это голосом человека, который прошёл путь до экзамена много раз вместе со своими учениками и точно знает: сдать базу — можно. Сдать хорошо — можно. А заодно, страшно сказать, можно в последний школьный год помириться с математикой.

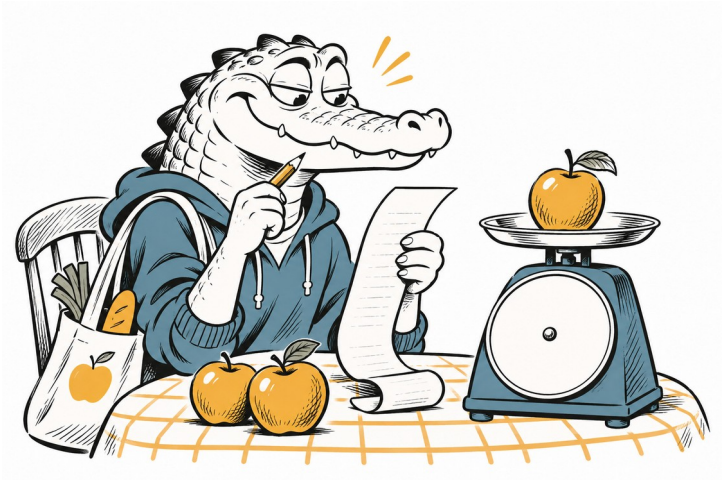
Если вы читали «Курс молодого огэшника» — с возвращением: клеточка вернулась, крокодил подрос, икс всё ещё ждёт. Если не читали — ничего страшного: эта книга самостоятельная, знакомство с первой частью франшизы необязательно.

P. S. Если вы взрослый и купили эту книгу выпускнику — спасибо. Только, вручая, не говорите «это надо прочитать до экзамена». Скажите: «смотри, тут крокодил подрос и устроился оценщиком». Работает лучше.

Читайте, смейтесь, решайте. Можно всё сразу.

С верой в каждого выпускника,

Наталья Михайловна, учитель математики, автор тренажёров mathexam.space



Как устроена эта книга

На каждый из двадцати одного номера экзамена здесь заведено досье из семи пунктов.

- **Что хотят.** Коротко и честно: что именно проверяет задание.
- **Классическая ловушка.** Место, где чаще всего теряют балл. Ищите эту ловушку в разобранном примере и проверяйте себя на новой задаче.
- **Вредный совет.** Так делать не нужно. Пункт написан для смеха — и для прививки: посмеявшись над вредным советом, следовать ему уже как-то неловко.
- **А теперь серьёзно.** Рабочий приём без шуток. Ну, почти без шуток.
- **Карта темы.** Основные способы, которыми задают один и тот же экзаменационный вопрос. При открытии тренажёра посмотрите список вариантов по этому номеру.
- **Разбор основных прототипов.** Типовые задачи, решённые до конца, шаг за шагом; каждый шаг — одно действие, «дальше очевидно» здесь не водится. Прочитали разбор — закройте его и решите задачу сами: это честный тест на понимание.
- **Проверь себя.** Несколько задач для самостоятельной тренировки. Ответы — в конце книги.

В начале каждой главы есть ссылка и QR-код. Они открывают один урок по номеру экзамена. Другие типы можно выбрать в списке уроков этой темы. Все двадцать одна тема собраны в курсе «База без пробелов» на MathExam: он бесплатный, работает с телефона, начинается с разминки для базовых навыков и открывает нужную тему прямо по ссылке из главы. Сначала попробуйте решить задачу самостоятельно. Если понадобилась подсказка, вернитесь к этому умению на новой задаче и проверьте, получается ли без помощи.

Важно: это обзорный маршрут по всем номерам экзамена, а не полный каталог прототипов. Задача книги — показать устройство каждого задания, его главную

ловушку и рабочий приём, а затем передать вас систематической практике в тренажёре.

Читать можно подряд, а можно открывать с любого места: у каждой главы всё своё — ловушка, разбор и тренажёр. Сквозные приёмы — крестик 2×2, дежурные тройки, метод удобного числа — представляются при первом появлении и дальше просто работают.

Тренажёры с бумаги. Если QR-код не открывается, зайдите на mathexam.space/ege-baza/ и найдите в курсе номер из заголовка главы. При работе с бумагой начните с рубрики «Проверь себя».

Краткий брифинг: что вообще происходит

ЕГЭ по базовой математике — это 21 задание из школьной программы и три часа времени. Никакой второй части, никаких развёрнутых решений: только ответы в бланке.

- 21 задание, каждое стоит один первичный балл. Максимум — 21.
- 3 часа, то есть 180 минут: по восемь с половиной минут на задание, если тратить их поровну. Спойлер: поровну не понадобится.
- Ответ — целое число, конечная десятичная дробь или последовательность цифр. В заданиях на соответствие цифры записывают в порядке букв. В заданиях с выбором нескольких пунктов записывают номера подходящих вариантов подряд.
- Результат базового экзамена оценивают по пятибалльной шкале. Успешная сдача нужна для получения аттестата. Итоговую школьную отметку в аттестате рассчитывают по школьным оценкам. Если вуз требует результат ЕГЭ по математике, для поступления нужен профильный экзамен.
- Шкалу перевода первичных баллов в пятибалльную оценку за экзамен уточняйте для своего года.
- Вместе с работой выдают справочные материалы — лист с формулами. Это официальная шпаргалка; глава про стереометрию научит ею пользоваться.
- Калькулятор запрещён. Линейка разрешена. Черновик не проверяется: всё ценное живёт только в бланке.

Утверждённая демоверсия, спецификация и кодификатор ЕГЭ 2027.

Мифы и легенды базового ЕГЭ

Миф первый. «База — это изи, готовиться не надо». База проще профиля — это правда. Но 21 задание за три часа проверяют не гениальность, а темп и внимательность, и двойки на базе случаются каждый год. Все они начинались со слов «да там же база».

Миф второй. «Справочные материалы всё решат». Там формулы, а не решения. Формула объёма конуса не подставит числа вместо вас и не напомнит про одну треть. Справочные материалы — отличный напарник, но работать в паре нужно уметь: полистайте их до экзамена, а не на нём впервые.

Миф третий. «Двойку на базе получить нельзя». Можно. Если до порога не хватает баллов, начните с номеров, в которых теряете баллы на вычислениях или чтении условия. После отработки решите новый вариант целиком.

Миф четвёртый. «За неверный ответ снимают баллы». Штрафов нет. Неверный ответ приносит ровно столько же, сколько пустая клетка, — ноль. Поэтому пустых клеток быть не должно: разумная запись имеет шанс, пустота — никогда.

Миф пятый. «Ночь зубрёжки перед экзаменом всё решит». Сонный мозг переводит треть в 0,33 и складывает проценты между собой. Выспаться — тоже подготовка, причём единственная её часть, которую можно выполнить лёжа.

Экипировка выживальщика

Что берём с собой на экзамен.

- **Документ, удостоверяющий личность.** Положите его рядом с ручками вечером.
- **Чёрная гелевая или капиллярная ручка.** Запасная тоже пригодится.
- **Линейка без формул.** Обычная, честная. «Умную» линейку со шпаргалками фейс-контроль развернёт вместе с владельцем.
- **Справочные материалы.** Их выдадут прямо с работой — формулы будут ждать на столе, как меню в кафе. Ваша задача до экзамена — один раз изучить это меню, чтобы в день X не читать его по слогам.
- **Вода и перекус.** Возьмите при необходимости. Упаковка не должна мешать другим участникам.
- **Калькулятор остаётся дома и грустит.** Прятать его в носок — по-прежнему худшая инвестиция экзамена: удаление стоит дороже всех вычислений мира.
- **Знания.** Единственный предмет экипировки, который не выдают на входе. Зато его выдают заранее — в школе, в этой книге и в «Базе без пробелов».

Разминка: закрыть пробелы

Вспомнить основу

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#foundation



Если экзаменационная задача падает не на идее, а на арифметике — уехала запятая, потерялся минус, — начинать нужно не с прототипов, а отсюда. В одиннадцатом классе это не стыдно. Стыдно — отдать балл базовому ЕГЭ навыку из пятого класса.

Экспресс-диагностика. Шесть задач, по одной на каждую болевую точку. Решите письменно, как на экзамене, а не «на глазок»:

1) $7 + 3 \cdot 5$

2) $1/2 + 1/4$

3) $4 - 11$

4) Округлите 6,47 до десятых.

5) 2^5

6) 15% от 200

Ответы разминки — прямо здесь, без похода в конец книги: 22; 0,75; −7; 6,5; 32; 30. Всё сошлось — листайте дальше со спокойной совестью. Где-то споткнулись — вот адреса ремонта.

Порядок действий. Умножение идёт раньше сложения, даже когда очень хочется слева направо. Ошибка в №1 — тренажёр «Арифметика».

Дроби. Дроби из девятого класса вас помнят — освежите знакомство до очной встречи в задании 14. Ошибка в №2 — тренажёр «Дроби».

Отрицательные числа. Минус — полноправный житель бланка ответов; главное — не потерять его по дороге. Ошибка в №3 — тренажёр «Отрицательные числа».

Округление. При обычном округлении положительного числа смотрим на первую отбрасываемую цифру: начиная с 5, увеличиваем последний оставляемый разряд на единицу. В задаче про целые пачки сначала спросите, хватит ли округлённого количества. Ошибка в №4 — тренажёр «Округление».

Степени и корни. 2^5 считается за пять секунд ровно один раз в жизни — потом просто помнится. Ошибка в №5 — глава про задание 16 и практика по ссылке из этой главы.

Проценты. Ошибка в №6 — не беда, а анонс: в главе про задание 15 вас ждёт крестик 2×2, после которого проценты перестанут быть событием.

К этим навыкам можно вернуться в разделе «Вспомнить основу». Начните с того упражнения, в котором заметили ошибку.

Прикидка при делении

Потренируйтесь округлять целое число до десятков и сотен прямо от исходного числа. Например, 149 ближе к 150 среди десятков и к 100 среди сотен. Если оба круглых числа одинаково близки, выбирайте большее: 150 до сотен даёт 200.

587 карточек, по 68 в пачке. Для первой цифры 58 мало, поэтому берём 587. Округлённые 600 и 70 дают прикидку около 9. Проверяем исходными числами: $68 \cdot 9 = 612$, а $68 \cdot 8 = 544$. Получаем 8 полных пачек и 43 карточки в остатке.

Вопрос меняет ответ. Полных пачек восемь. Чтобы поместились все карточки, нужна девятая. В обоих случаях сначала проверяем произведение, потом смотрим на остаток.

Проверь себя. 412 карточек, по 51 в пачке. Сколько полных пачек получится и сколько пачек нужно для всех карточек? Будет 8 полных пачек и 4 карточки в остатке. Всего нужно 9 пачек.

Тренажёры MathExam. Округлять до десятков · Округлять до сотен · Прикинуть цифру частного.

Часть первая. Практические задачи: математика выходит в люди

Задание 1. Сдача без сдачи позиций

Тренажёр к заданию 1

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=round

Что хотят. Посчитать деньги, палатки, банки краски — бытовую арифметику в чистом виде. Первое задание экзамена встречает вас у кассы супермаркета, и его три жанра различаются одним словом в вопросе: «сколько», «наибольшее» или «наименьшее».

Классическая ловушка. Школьное округление. 277 пассажиров делим на 45 мест — получаем 6,155… и по привычке пятого класса округляем до шести автобусов. А теперь смотрим на 7 человек, оставшихся на обочине. Жизнь округляет не по цифре после запятой, а по смыслу: людям нужен седьмой автобус, даже если он поедет полупустым. И наоборот: 8,88 сырка на ваши деньги — это восемь сырков; девятый в долг не отпускают.

Вредный совет. «Округляй, как в пятом классе учили: пять и больше — вверх, меньше — вниз. Автобус — не место для сантиментов».

А теперь серьёзно. Направление округления диктует вопрос, а не дробная часть. Спрашивают «наибольшее, что можно себе позволить» — деньги и ресурсы ограничены, округляем вниз. Спрашивают «наименьшее, чтобы хватило всем» — потребность обязана быть покрыта, округляем вверх. И привычка на выходе: перечитать вопрос. Спрашивали сдачу — а вы посчитали стоимость покупки; оба числа честные, балл дают за одно.



Рис. 1

Карта темы

Пять жанров первого задания.

- **Прямой счёт.** Покупка, сдача, «сколько списали с карты». Сложение, вычитание, умножение — и один враг: копейки, которые удобнее сразу перевести в десятичную запись рублей.
- **Обратный счёт.** Известна сдача — найдите цену одной штуки: из денег вычесть сдачу, разделить на количество.
- **Наибольшее — округление вниз.** Сырки, пачки чая, страницы принтера. Иногда с довеском-условием: букет только из нечётного числа цветов.
- **Наименьшее — округление вверх.** Палатки, автобусы, банки краски. Часто двухходовые: сначала общий объём потребности, потом деление, потом округление вверх.
- **Задачи с продолжением.** Тарифы со списанием по дням, окупаемость счётчиков: арифметика та же, но вопрос звучит как «через сколько превысит» — и здесь решает аккуратность на последнем шаге.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — прямой счёт. Для ремонта купили 14 м кабеля по 47 руб. 80 коп. за метр и коробку крепежа за 215 руб. На кассе расплатились купюрой в 1000 руб. Сколько рублей получили сдачи?

Шаг 1. Копейки — в десятичную запись: 47 руб. 80 коп. = 47,8 руб.

Шаг 2. Кабель: $47{,}8 \cdot 14 = 669{,}20$ руб.

Шаг 3. Вся покупка: $669{,}20 + 215 = 884{,}20$ руб.

Шаг 4. Сдача: $1000 - 884{,}20 = 115{,}80$. Вопрос был про сдачу — отвечаем про сдачу.

Ответ: 115,8.

Прототип 2 — наибольшее. Пачка чая стоит 43 рубля. Какое наибольшее число пачек можно купить на 300 рублей?

Шаг 1. Делим: 300 / 43 = 6,97…

Шаг 2. Округляем вниз: 6 пачек. Седьмая не помещается в бюджет, как бы близко ни подобралась дробь к семёрке.

Шаг 3. Проверка: $6 \cdot 43 = 258 \leq 300$, а $7 \cdot 43 = 301$ — уже перебор.

Ответ: 6.

Прототип 3 — наименьшее, двухходовка. Для покраски 1 кв. м потолка требуется 150 г краски. Краска продаётся в банках по 2 кг. Какое наименьшее число банок нужно для потолка площадью 72 кв. м?

Шаг 1. Общая потребность: $72 \cdot 150 = 10\,800$ г = 10,8 кг.

Шаг 2. Делим на банку: 10,8 / 2 = 5,4.

Шаг 3. Округляем вверх: 6 банок. Пять банок — это 10 кг, и для оставшейся части потолка не хватит 0,8 кг краски.

Ответ: 6.

Прототип 4 — наименьшее, с невидимками. В летнем лагере 168 детей и 15 воспитателей. Автобус вмещает не более 40 пассажиров. Какое наименьшее число автобусов нужно, чтобы перевезти всех за один раз?

Шаг 1. «Всех» — это и дети, и воспитатели: 168 + 15 = 183 пассажира. Воспитатели пешком не пойдут.

Шаг 2. Делим: 183 / 40 = 4,575.

Шаг 3. Вверх: 5 автобусов.

Ответ: 5.

Прототип 5 — время через полночь. Дежурный начал смену в 21:45, а закончил в 02:20 на следующий день. Сколько минут он дежурил?

Шаг 1. До полуночи от 21:45 осталось 2 часа 15 минут, то есть 135 минут.

Шаг 2. От полуночи до 02:20 прошло 2 часа 20 минут, то есть 140 минут.

Шаг 3. Складываем 135 + 140 = 275 минут.

Ответ: 275.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Шоколадка стоит 35 рублей. Какое наибольшее число шоколадок можно купить на 250 рублей?

2) Тетради продаются в упаковках по 5 штук. Классу нужно 63 тетради. Какое наименьшее число упаковок придётся купить?

3) Обед в столовой: суп за 89 рублей, котлета за 154 рубля и компот за 32 рубля. Сколько рублей сдачи будет с 500 рублей?

4) Для оформления каждого из шести столов нужны 24 бумажные салфетки. В пачке 18 салфеток. Сколько пачек надо открыть, чтобы накрыть все столы?

Задание 2. Сколько вешать в граммах?

Величины и их значения

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=practice-units-match

Что хотят. Сопоставить четыре величины с четырьмя значениями: что длится 0,1 секунды — вспышка фотоаппарата или оборот Сатурна вокруг Солнца, что весит 300 граммов — книга или вагон. Это задание не про вычисления, а про чувство масштаба: экзамен проверяет, живёте ли вы в том же физическом мире, что и составители.

Классическая ловушка. Формат ответа. Здесь в бланк идёт не число, а последовательность цифр — номера значений в порядке букв А-Б-В-Г, без запятых и пробелов. Можно верно сообразить все четыре пары и потерять балл, записав цифры в порядке «как вспомнилось». Порядок держат буквы, а не ваша интуиция.

Вредный совет. «Числа с длинными хвостами нулей выглядят солидно — отдавай их самым важным на вид величинам».

А теперь серьёзно. Работайте методом крайностей. В каждой четвёрке есть очевидный гигант и очевидная кроха — они находят своих хозяев мгновенно. После этого остаются две пары средних, и чаще всего они различимы с одного взгляда. Три уверенных ответа автоматически пристраивают четвёртый: метод исключения сдаёт это задание за вас.

Карта темы

Минимальный набор ориентиров нормального мира.

- **Время.** Вспышка, реакция, один удар сердца — доли секунды и секунды. Урок, фильм — десятки минут и пара часов. Перелёт через страну — часы. Год далёкой планеты — годы и тысячи суток.
- **Длина.** Монета — сантиметры; рост человека — около 1,7 м; девятиэтажка — под 30 м; расстояния между городами — сотни километров; до Луны — сотни тысяч.
- **Масса.** Таблетка — миллиграммы; смартфон — около 200 г; человек — десятки килограммов; автомобиль — тонны; корабли и айсберги — тысячи тонн.

- **Объём.** Ложка — миллилитры; пакет сока — литры; ванна и холодильник — сотни литров; вагон и цистерна — десятки кубометров; озеро — кубические километры.
- **Приём-переводчик.** Непонятное число переводите в человеческий: 4333 суток — это примерно 12 лет (четыре тысячи дней делим на 365) — нормальный неторопливый год Юпитера, а не длительность перелёта.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — время. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями.

А) время реакции водителя; Б) продолжительность школьного урока; В) перелёт Москва — Владивосток; Г) период обращения Юпитера вокруг Солнца.

1) 45 минут; 2) 4333 суток; 3) 1 секунда; 4) 8 часов.

Шаг 1. Крайности вперёд. Кроха — реакция водителя: 1 секунда, А—3. Гигант — Юпитер: 4333 суток, Г—2.

Шаг 2. Осталось двое: урок и перелёт. Урок — 45 минут (А как же: школьная классика), Б—1. Перелёт через всю страну — 8 часов, В—4.



Рис. 1

Шаг 3. Собираем цифры в порядке букв А-Б-В-Г: 3, 1, 4, 2.

Ответ: 3142.

Прототип 2 — масса. Установите соответствие между величинами и их возможными значениями.

А) масса таблетки; Б) масса домашнего кота; В) масса грузовика; Г) масса айсберга.

1) 5 кг; 2) 500 мг; 3) 100 000 т; 4) 8 т.

Шаг 1. Кроха — таблетка: 500 мг, А—2. Гигант — айсберг: 100 000 т, Г—3.

Шаг 2. Кот против грузовика: 5 кг коту (упитанному, но реалистичному), 8 т грузовику. Б—1, В—4.

Шаг 3. Порядок букв: 2, 1, 4, 3.

Ответ: 2143.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) А) толщина школьной тетради; Б) высота девятиэтажного дома; В) длина реки Волги; Г) диаметр монеты.

1) 3530 км; 2) 4 мм; 3) 27 м; 4) 2,3 см.

2) А) объём чайной ложки; Б) объём ванны; В) объём олимпийского бассейна; Г) объём железнодорожной цистерны.

1) 250 л; 2) 5 мл; 3) 2500 м³; 4) 60 м³.

Задание 3. Графики, таблицы, два столбца

Тренажёр к заданию 3

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=data

Что хотят. Прочитать таблицу, график или диаграмму и вытащить оттуда одно число: лучший результат спортсмена, ближайшую электричку, штраф за лихачество. Математики здесь на копейку, внимательности — на рубль.

Классическая ловушка. Таблицы диапазонов. Разрешено 60 км/ч, камера зафиксировала 105. Рука тянется искать в таблице штрафов строку со 105 — а таблица построена по ПРЕВЫШЕНИЮ: 105 − 60 = 45, и это строка «41–60», штраф 1000. Кто ищет по самой скорости, платит (к счастью, только в уме) впятеро больше. Сначала вычислите ключ, потом открывайте таблицу.

Вредный совет. «Смотри на самое большое число в таблице — обычно спрашивают про него».

А теперь серьёзно. Ритуал трёх взглядов. Первый — на заголовки строк и столбцов: что здесь вообще измеряют. Второй — на единицы и подписи осей: метры или тысячи метров, рубли или проценты. Третий — на вопрос целиком: «наибольшее», «ближайший», «на сколько» или «во сколько раз». Последняя пара кормит составителей вариантов десятилетиями: «на сколько» — это вычитание, «во сколько раз» — деление. Перепутать их — значит ответить на чужой вопрос.

Карта темы

Пять жанров чтения с листа.

- **Таблицы результатов.** У каждого спортсмена — лучшая попытка, потом сортировка мест. Два разных вопроса: «кто занял третье место» и «каков его результат».

- **Расписания.** Подходит рейс, который отправляется после вашего прихода И довозит до нужной станции. Пустая клетка в расписании — поезд там не останавливается, каким бы удобным ни было время.
- **Таблицы диапазонов.** Штрафы, налоги, тарифы: сначала вычислить ключ — превышение, мощность, объём, — потом найти строку-диапазон.
- **Графики.** Значение в точке, наибольшее и наименьшее, «сколько дней значение было выше N» — считаем точки над горизонтальной линией.
- **Диаграммы.** Сравнение столбиков: «на сколько» и «во сколько раз» — вычитание против деления, см. выше.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — расписание. Пригородные электропоезда идут по маршруту Город — Дачная — Речная:

№ поезда	Город	Дачная	Речная
1	8:12	8:50	9:05
2	8:25	8:58	—
3	8:40	—	9:32
4	8:55	9:27	9:48

Пассажир пришёл на станцию Город в 8:30 и хочет уехать на станцию Речная. Укажите номер ближайшего подходящего поезда.

Шаг 1. Отсекаем ушедшие: поезда 1 и 2 отправились до 8:30 — мимо.

Шаг 2. Проверяем маршрут оставшихся: поезд 3 отправляется в 8:40 и на Речной останавливается — прочерк у него только по Дачной, а Дачная нам и не нужна.

Шаг 3. Поезд 3 подходит и он ближайший. Поезд 4 тоже доедет до Речной, но отправляется на 15 минут позже.

Ответ: 3.

Прототип 2 — таблица диапазонов. Используйте учебную таблицу штрафов за превышение скорости.

Превышение, км/ч	21–40	41–60	61–80	81 и более
Штраф, руб.	500	1000	2000	5000

Максимальная разрешённая скорость на участке — 60 км/ч, камера зафиксировала 105 км/ч. Какой штраф заплатит владелец автомобиля?

Шаг 1. Ключ таблицы — превышение: 105 − 60 = 45 км/ч.

Шаг 2. Ищем диапазон для 45: строка «41–60».

Шаг 3. Штраф — 1000 рублей. Ловушка главы обезврежена: строку «81 и более» сегодня кормить не будем.

Ответ: 1000.

Прототип 3 — таблица результатов. Прыжки в длину, у каждого спортсмена три попытки; места распределяются по лучшей попытке:

Спортсмен	I, м	II, м	III, м
Орлов	7,12	7,45	7,30
Соколов	7,50	7,10	7,38
Гусев	7,05	7,22	7,41
Лебедев	7,60	7,15	7,33

Каков результат лучшей попытки спортсмена, занявшего третье место?

Шаг 1. Лучшая попытка каждого: Орлов — 7,45; Соколов — 7,50; Гусев — 7,41; Лебедев — 7,60.

Шаг 2. Сортируем: Лебедев (7,60), Соколов (7,50), Орлов (7,45), Гусев (7,41).

Шаг 3. Третье место — Орлов, его лучшая попытка — 7,45. Вопрос был про результат, а не про фамилию: отвечаем числом.

Ответ: 7,45.

Прототип 4 — график. По графику определите, сколько месяцев за год выпадало больше 60 мм осадков. (рис. 1)

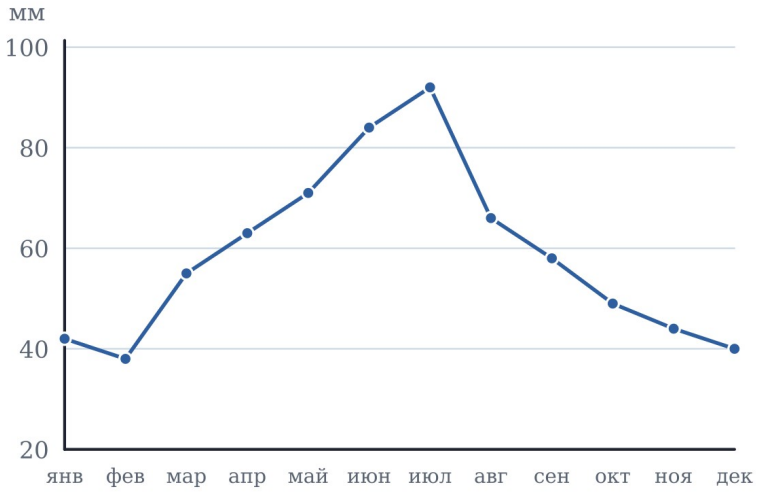


Рис. 1

Шаг 1. Мысленно проводим горизонтальную линию на уровне 60.

Шаг 2. Считаем точки строго выше линии: апрель (63), май (71), июнь (84), июль (92), август (66).

Шаг 3. Итого 5 месяцев. Сентябрьские 58 под линией — «больше 60» значит больше, а не почти.

Ответ: 5.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) По таблице штрафов из разбора: разрешено 40 км/ч, камера зафиксировала 130 км/ч. Какой штраф заплатит владелец автомобиля?

2) Дневная температура за неделю: пн 14°, вт 17°, ср 21°, чт 19°, пт 23°, сб 22°, вс 18°. Сколько дней температура была выше 18°?

3) Во сколько раз продажи среды больше продаж понедельника? (рис. 2)

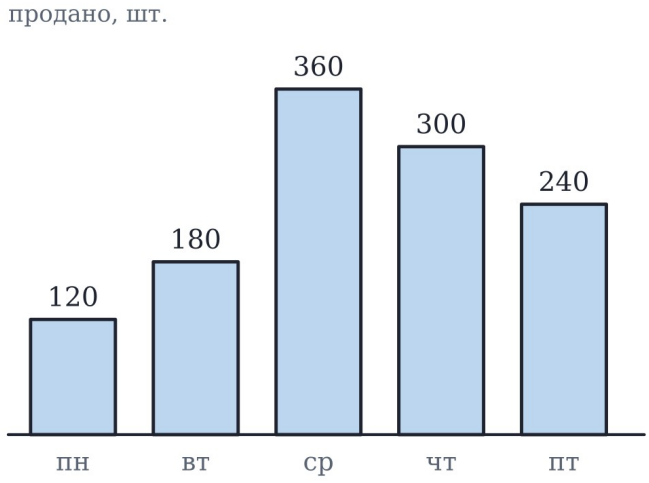


Рис. 2

Задание 4. Формула выдаётся бесплатно

Тренажёр к заданию 4

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=formulas

Что хотят. Взять готовую формулу — из физики, мореплавания или уличного фонаря — подставить числа и посчитать. В задании 4 формулу печатают прямо в условии. Ваше дело — не сломать её при подстановке.

Классическая ловушка. Обратный ход. Дана мощность $P = I^2R$, известны P и I, найти R. Торопыга делит P на I — и получает ответ из параллельной вселенной. Делить нужно на I^2: квадрат — личное имущество буквы, при переезде по формуле он следует за ней.

Вредный совет. «Подставляй числа в том порядке, в каком они встречаются в условии, — авторы наверняка расположили их правильно».

А теперь серьёзно. Ритуал прошлого сезона работает без изменений: выпишите формулу и под каждой буквой подпишите её число — как имена на стаканчиках в кофейне. Путаница исчезает на этапе подписывания. Дальше — порядок действий: степень вне очереди, потом умножение и деление. И помните: бланк принимает число без единиц измерения — «джоули» и «метры» в клеточки не помещаются и не нужны.

Карта темы

В банке три вида зависимостей и один особый ход.

- **Линейные формулы.** Перевод градусов Цельсия в Фаренгейты, шаги пешехода $s = n \cdot l$, эхолот $h = v \cdot t/2$. Подставил — посчитал, главное не перепутать буквы.
- **Квадратичные.** Мощность $P = I^2R$, энергия $E = mv^2/2$. Здесь живёт главное правило: сначала квадрат, потом всё остальное. Квадрат никого, кроме своей буквы, не касается.
- **Рациональные.** $P = U^2/R$, $A = U^2t/R$ — формулы-этажерки. Глава про дроби передаёт привет: числитель отдельно, знаменатель отдельно, черта — это деление.
- **Обратный ход.** Ищут букву из глубины формулы. Два честных пути: сначала выразить букву, потом подставить — буквы двигать легче, чем числа; или подставить всё известное и решить получившееся уравнение. Выбирайте по характеру.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — линейная формула. Датчик в морозильной камере показал −35 °C. Журнал этих измерений ведут в градусах Фаренгейта. Температуры связаны формулой $t_F = 1{,}8 \cdot t_C + 32$. Какое число надо записать в журнал?

Шаг 1. Подписываем число под буквой: $t_C = -35$.

Шаг 2. Умножение раньше сложения: $1{,}8 \cdot (-35) = -63$.

Шаг 3. Прибавляем: $-63 + 32 = -31$.

Ответ: −31.

Прототип 2 — квадратичная формула. Мощность постоянного тока вычисляется по формуле $P = I^2R$, где I — сила тока в амперах, R — сопротивление в омах. Найдите P, если I = 7 А, R = 3 Ом.

Шаг 1. Стаканчики подписаны: I — это 7, R — это 3.

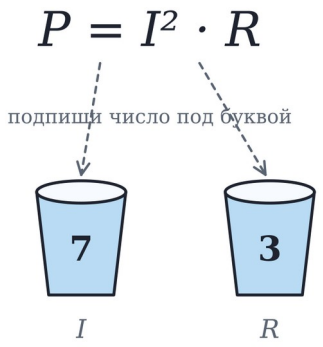


Рис. 1

Шаг 2. Степень вне очереди: $I^2 = 49$.

Шаг 3. Умножаем: $P = 49 \cdot 3 = 147$. Классическая ошибка — перемножить $7 \cdot 3$ и возвести результат: получится 441, и это уже чужая задача.

Ответ: 147.

Прототип 3 — формула-этажерка. Работа постоянного тока вычисляется по формуле $A = U^2t/R$. Найдите A, если U = 10 В, t = 6 с, R = 12 Ом.

Шаг 1. Верхний этаж: $U^2 = 100$, затем $100 \cdot 6 = 600$.

Шаг 2. Дробная черта — это деление: $A = 600 / 12 = 50$.

Ответ: 50.

Прототип 4 — обратный ход. Мощность постоянного тока вычисляется по формуле $P = I^2R$. Найдите R, если P = 200 Вт, I = 5 А.

Шаг 1. Выражаем букву до подстановки: $R = P / I^2$. Квадрат переехал вниз вместе со своей буквой.

Шаг 2. Считаем знаменатель: $I^2 = 25$.

Шаг 3. $R = 200 / 25 = 8$. Проверка обратной подстановкой: $25 \cdot 8 = 200$. Сошлось.

Ответ: 8.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Расстояние по шагам: $s = n \cdot l$. Найдите s (в метрах), если $n = 2500$ шагов, $l = 0{,}8$ м.

2) Кинетическая энергия: $E = mv^2/2$. Найдите E, если $m = 6$, $v = 5$.

3) Перевод в градусы Цельсия: $t_C = (5/9) \cdot (t_F - 32)$. Найдите t_C, если $t_F = 212$.

4) Мощность: $P = U^2/R$. Найдите R, если $U = 22$ В, $P = 44$ Вт.

Задание 5. Шансы есть всегда

Тренажёр к заданию 5

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=probability

Что хотят. Найти вероятность события: пирожок с капустой, гусь на птицеферме, доклад профессора в последний день конференции. Формула одна на всех, сюжетов — сотни, и все из мирной жизни.

Классическая ловушка. Слово «раз». В коробке только красные и синие жетоны. Красных в семь раз больше, а вытянуть наугад хочется синий. Рука пишет: 1/7. Стоп. Разложим на части: одна синяя, семь красных, всего восемь. Вероятность вытянуть синий жетон — 1/8, то есть 0,125. Если групп две, «в k раз больше» даёт k + 1 часть: k частей одной группы и одну часть другой.

Вредный совет. «Если в задаче два вида предметов, вероятность всегда 0,5: либо повезёт, либо нет. Народная теория вероятностей не ошибается».

А теперь серьёзно. Если исходы равновозможны, разделите число благоприятных исходов на число всех исходов. Обе цифры пересчитайте из текста сами: «все» часто собираются сложением, а «благоприятные» прячутся за словом «остальные». Фейс-контроль прошлого сезона действует без изменений: ответ живёт между 0 и 1, всё, что вылезло за рамки, — сигнал пересчитать. И контрольная лампочка бланка из главы про дроби: 1/8 в клеточки не помещается, 0,125 — помещается.

Карта темы

Пять подтипов банка — по возрастанию хитрости.

- **Прямой выбор.** Пирожки, чашки, билеты: посчитал своих, поделил на всех.
- **Сначала собери «всех».** Карандаши трёх твёрдостей, спортсмены из четырёх стран: общее число исходов складывается из кусочков, и этот шаг — часть задачи.
- **«В k раз больше».** Считаем частями: k частей одних плюс одна часть других. Ловушка из начала главы живёт здесь.
- **Обратное событие.** На схеме маршрута закрыты 5 из 25 переходов. Какова вероятность выбрать открытый переход? Можно посчитать открытые переходы или вычесть из единицы вероятность выбрать закрытый переход.
- **Расписания и жеребьёвки.** Доклады по дням, выступления по жребию: благоприятные исходы — все места нужного дня, и их ещё нужно вычислить.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — прямой выбор. В коробке вперемешку лежат 60 чайных пакетиков, одинаковых на вид: 18 с зелёным чаем, остальные — с чёрным. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пакетик окажется с зелёным чаем.

Шаг 1. Благоприятные исходы — 18, все исходы — 60.

Шаг 2. Вероятность: 18/60 = 3/10 = 0,3.

Шаг 3. Фейс-контроль: 0,3 лежит между 0 и 1 — новую физику сегодня не открыли.

Ответ: 0,3.

Прототип 2 — «в k раз больше». На птицеферме есть только куры и гуси, причём кур в 9 раз больше, чем гусей. Найдите вероятность того, что случайно выбранная птица окажется гусем.

Шаг 1. Раскладываем на части: гуси — 1 часть, куры — 9 частей, всего 10 частей.



«в 9 раз больше» = 9 + 1 = 10 частей

P(гусь) = 1/10 = 0,1

Рис. 1

Шаг 2. Вероятность гуся: 1/10 = 0,1.

Шаг 3. Проверка на конкретных числах: пусть гусей 10, тогда кур 90, всего 100 птиц — и 10/100 = 0,1. Сошлось.

Ответ: 0,1.

Прототип 3 — «без брака». В расписании на неделю было 250 рейсов автобуса. Из-за ремонта дороги 15 из них отменили. Один рейс выбирают наугад из исходного расписания. Какова вероятность, что он состоится?

Путь первый — напрямую: в расписании осталось 250 − 15 = 235 рейсов, вероятность 235/250 = 0,94.

Путь второй — через дополнение: вероятность отмены 15/250 = 0,06, значит, рейс состоится с вероятностью 1 − 0,06 = 0,94.

Оба пути честные; второй быстрее, когда числа крупные. Главное — ответить на заданный вопрос: спрашивали о рейсе, который состоится.

Ответ: 0,94.

Прототип 4 — расписание. Научная конференция идёт 3 дня. Всего запланировано 75 докладов: в первый день — 15, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что доклад профессора Н. окажется в последний день.

Шаг 1. Считаем места последнего дня: после первого дня остаётся 75 − 15 = 60 докладов.

Шаг 2. Поровну на два дня: 60 / 2 = 30 докладов в последний день.

Шаг 3. Вероятность: 30/75 = 0,4.

Ответ: 0,4.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Из 20 экзаменационных билетов 3 выигрышные для вас — вы их выучили лучше всего. Какова вероятность вытянуть один из них?

2) В коробке пакетиков с чёрным чаем в 3 раза больше, чем с зелёным. Найдите вероятность того, что случайный пакетик окажется с чёрным чаем.

3) Из 125 приглашений на концерт 5 аннулировали. Организатор случайно выбирает одно из всех 125 приглашений. Найдите вероятность выбрать действующее приглашение.

4) В чемпионате участвуют 40 гимнасток: 8 из Венгрии, 12 из Румынии, остальные — из Болгарии. Найдите вероятность того, что первой по жребию выступит спортсменка из Болгарии.

Задание 6. Тариф «Выгодный»

Тренажёр к заданию 6

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=choice

Что хотят. Выбрать самый выгодный вариант: собрать полный комплект инструментов подешевле, сравнить поездку поездом и на машине, вычислить рейтинг фена по формуле рейтингового агентства. Это задание про умение считать чужие деньги так же внимательно, как свои.

Классическая ловушка. Жадный выбор. Кажется, что дешевле всего купить четыре самых дешёвых позиции по отдельности, — но тяпка, как назло, продаётся только в наборах. А бывает наоборот: комплект «два в одном» дороже двух одиночных покупок. Единственный надёжный путь — выписать все разумные комбинации и честно их сравнить. Первый подходящий вариант — это кандидат, а не ответ.

Вредный совет. «Первый подходящий вариант и есть лучший. Кто ищет дальше — тот просто жадничает».

А теперь серьёзно. Читайте два места условия с лупой. Первое — что именно нужно собрать: что должно войти в полный комплект и допустимы ли повторы. Второе — что записать в ответ: где-то просят стоимость, где-то номера наборов без пробелов и запятых, а где-то наименьший рейтинг, который спокойно может оказаться отрицательным — минус в бланке по-прежнему легален. И считайте до конца: «самый дешёвый» доказывается сравнением, а не интуицией.

Карта темы

Четыре витрины магазина выгоды.

- **Полный набор.** Переводчики со всеми языками, маршруты по всем музеям, комплект инструментов: перебираем комбинации, покрывающие весь список, выбираем дешевейшую. Ответ — номера без пробелов.
- **Рейтинг по формуле.** $R = 2(F + Q) + D - 0{,}01P$ и таблица моделей: четыре раза аккуратная подстановка. Глава «Формула выдаётся бесплатно» передаёт привет — ритуал стаканчиков обязателен.
- **Сравнение способов.** Поезд, машина, автобус; магазин с доставкой и без. Для каждого способа считается ПОЛНАЯ стоимость — с бензином, доставкой и всеми пассажирами, — и только потом сравнение.
- **Пересчёт расхода.** «9 литров на 100 км, а ехать 600» — это пропорция: расход растёт вместе с дорогой. В главе про проценты этот приём получит имя и фирменную табличку; здесь он работает инкогнито.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — полный комплект. Для грядок нужно купить лопату, тяпку, вилы и грабли. В магазине шесть предложений: 1) лопата и вилы — 370 руб.; 2) грабли — 190 руб.; 3) тяпка и лопата — 450 руб.; 4) вилы — 240 руб.; 5) тяпка и грабли — 410 руб.; 6) лопата — 160 руб. Какие предложения позволят купить все четыре инструмента с наименьшими затратами? Запишите номера подряд в любом порядке.

Шаг 1. Замечаем: тяпка живёт только в наборах 3 и 5 — значит, один из них берём обязательно.

Шаг 2. Ветка с набором 5 (тяпка и грабли, 410): остаются лопата и вилы. Набор 1 за 370 дешевле одиночных покупок 6 и 4 за 160 + 240 = 400. Итого 780.

Шаг 3. Ветка с набором 3 (тяпка и лопата, 450): остаются вилы и грабли. Дешевле всего взять 4 за 240 и 2 за 190. Итого 880.

Шаг 4. Сравниваем: 780 < 880. Побеждает пара наборов 1 и 5; в ответ — номера.

Ответ: 15 или 51.

Прототип 2 — рейтинг по формуле. Рейтинг чайников вычисляется по формуле $R = 2(F + Q) + D - 0{,}01P$, где F — функциональность, Q — качество, D — дизайн, P — цена в рублях. Найдите наименьший рейтинг по таблице: модель А — P = 2400, F = 3, Q = 4, D = 2; модель Б — P = 1600, F = 2, Q = 3, D = 1; модель В — P = 2000, F = 4, Q = 2, D = 3; модель Г — P = 1200, F = 1, Q = 3, D = 0.

Шаг 1. Модель А: $2\cdot(3 + 4) + 2 - 24 = 14 + 2 - 24 = -8$.

Шаг 2. Модель Б: $2\cdot5 + 1 - 16 = -5$. Модель В: $2\cdot6 + 3 - 20 = -5$. Модель Г: $2\cdot4 + 0 - 12 = -4$.

Шаг 3. Наименьший из чисел −8, −5, −5, −4 — это −8: на числовой прямой он левее всех. Отрицательный рейтинг — не опечатка, а суровая правда рынка чайников.

Ответ: −8.

Прототип 3 — сравнение способов. Семья из трёх человек едет в город, расположенный в 600 км. Билет на поезд стоит 1150 рублей на человека. Автомобиль расходует 9 литров бензина на 100 км пути, цена бензина — 50 рублей за литр. Автобусный билет стоит 950 рублей на человека. Сколько рублей стоит самый дешёвый вариант поездки для всей семьи?

Шаг 1. Поезд: $1150 \cdot 3 = 3450$.

Шаг 2. Автомобиль. Пропорция расхода: 9 л — на 100 км, x л — на 600 км. Дорога в 6 раз длиннее — бензина в 6 раз больше: 54 л. Стоимость: $54 \cdot 50 = 2700$.

Шаг 3. Автобус: 950 · 3 = 2850.

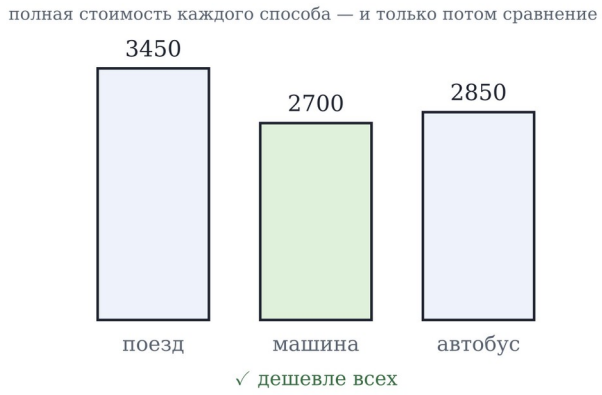


Рис. 1

Шаг 4. Сравнение: 2700 < 2850 < 3450. В ответ идёт стоимость, а не вид транспорта.

Ответ: 2700.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Такси «Стрела»: подача 150 рублей плюс 22 рубля за км. Такси «Комета»: подача 100 рублей плюс 27 рублей за км. Сколько рублей стоит более дешёвая поездка на 12 км?

2) Билет в музей А стоит 300 рублей, в музей Б — 280 рублей, единый билет в оба музея — 520 рублей. Посетить нужно оба музея. Каким вариантом это дешевле всего сделать? В ответе укажите наименьшую суммарную стоимость.

3) Рейтинг пылесосов: $R = 4(F + Q) - 0{,}01P$. Модель А: $F = 3$, $Q = 2$, $P = 1600$; модель Б: $F = 2$, $Q = 2$, $P = 1000$. Найдите наибольший рейтинг.

4) Семья из четырёх человек: поезд — 640 рублей с человека; автомобиль — расход 8 л на 100 км, путь 500 км, бензин 52 рубля за литр. Сколько рублей стоит самый дешёвый вариант?

Задание 7. Опознание графиков — 2

Наклон графика и производная

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=graphs

Что хотят. Сопоставить интервалы времени с характеристиками («рос», «падал», «был больше 150»), процессы с их графиками или касательные со значениями производной. Опознание продолжается: в прошлом сезоне вы отличали параболу от гиперболы, теперь предстоит отличать остывающий чай от летящего мяча. Ответ — последовательность цифр в порядке букв: формат-родственник главы «Сколько вешать в граммах?».

Классическая ловушка. Высота вместо направления. Характеристика «объём рос» — про НАПРАВЛЕНИЕ линии, а глаз цепляется за то, какой участок выше. График может расти низко на рисунке и убывать высоко. На гладкой вершине касательная горизонтальна, а правее вершины она может наклоняться вниз. Смотрите на наклон, а не на этаж. И помните: интервал «2018–2020» включает обе крайние точки.

Вредный совет. «Соединяй буквы с цифрами по порядку: А — 1, Б — 2. Составители любят аккуратность».

А теперь серьёзно. Работает метод уникальных характеристик — родной брат метода крайностей из главы про граммы. В четвёрке характеристик почти всегда есть одна, которая подходит ровно одному интервалу (минимум за весь период, «все значения выше 150»). Начинайте с неё: каждая закрытая пара сужает выбор для остальных, и последняя пара достаётся методом исключения. А форму кривой читайте как физику: прямая — процесс идёт равномерно, выпуклость — с замедлением или ускорением, горка — «вверх, потом вниз».

Карта темы

Пять способов прочитать график.

- **Интервалы и характеристики.** Реальная статистика по годам: где рос, где падал, где минимум. Точки — это значения, линии между ними — только для наглядности.
- **Процессы и графики.** Путь при постоянной скорости — прямая вверх; масса горящей свечи — прямая вниз; остывающий чай — падает быстро, потом всё медленнее; брошенный вверх мяч — горка.
- **Производная.** Найдите наклон касательной: разделите изменение высоты на изменение горизонтальной координаты. Считайте слева направо и учитывайте знак. Высота точки на графике для этого не нужна.
- **Метод уникальных.** Сначала характеристики-одиночки, затем исключение. Три уверенных пары четвёртую находят сами.

- **Формат.** Цифры в ответ идут строго в порядке букв А-Б-В-Г — семейное правило всех заданий-соответствий этой книги.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — интервалы и характеристики. На рисунке точками показан годовой объём производства завода с 2016 по 2024 год (в тысячах изделий); для наглядности точки соединены линиями. Поставьте в соответствие каждому периоду характеристику: (рис. 1)

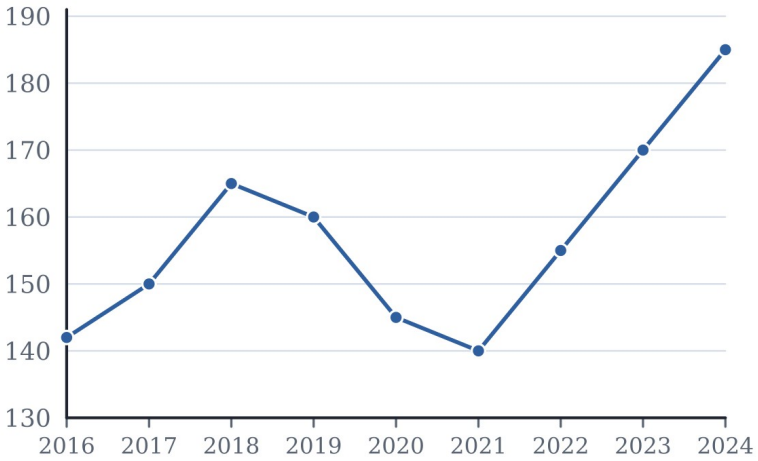


Рис. 1

А) 2016–2018; Б) 2019–2021; В) 2022–2024; Г) 2018–2020.

1) объём производства рос с каждым годом; 2) объём производства падал с каждым годом; 3) период содержит год с наименьшим объёмом за всё время; 4) в каждый год периода объём был больше 150 тысяч.

Шаг 1. Ищем уникальные характеристики. Минимум за всё время — 140 тысяч в 2021 году: он лежит только в периоде Б. Пара Б—3 закрыта.

Шаг 2. «Все значения выше 150»: подходит В (155, 170, 185). Пара В—4.

Шаг 3. Остались А и Г на «рос» и «падал». А: 142 → 150 → 165 — рос, А—1. Г: 165 → 160 → 145 — падал, Г—2. Заметьте: Б тоже падал, но его уже забрала уникальная тройка — метод исключения отработал.

Шаг 4. Собираем в порядке букв: А—1, Б—3, В—4, Г—2.

Ответ: 1342.

Прототип 2 — процессы и графики. На рисунках А–Г изображены графики зависимости величин от времени. Установите соответствие между процессами и графиками: (рис. 2)

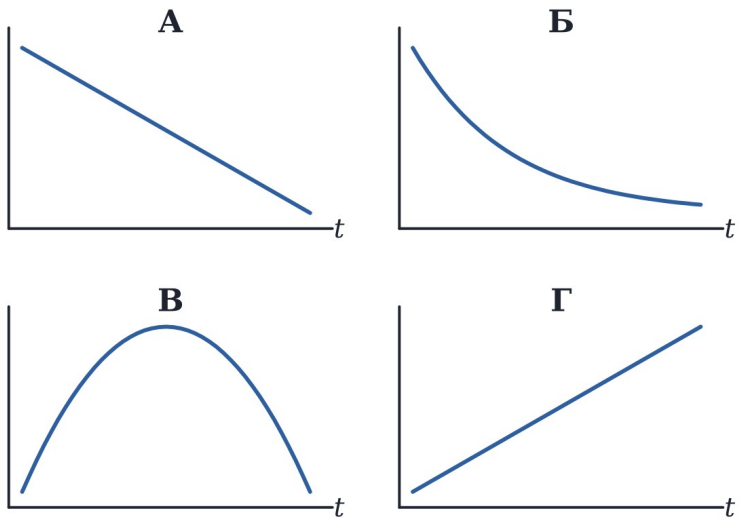


Рис. 2

1) путь автомобиля, едущего с постоянной скоростью; 2) высота мяча, брошенного вертикально вверх; 3) масса свечи, горящей с постоянной скоростью; 4) температура остывающего чая.

Шаг 1. Постоянная скорость — равномерный процесс — прямая линия. Путь растёт: прямая вверх — это график Г. Масса свечи убывает: прямая вниз — график А.

Шаг 2. Мяч летит вверх, замирает, падает: горка — график В.

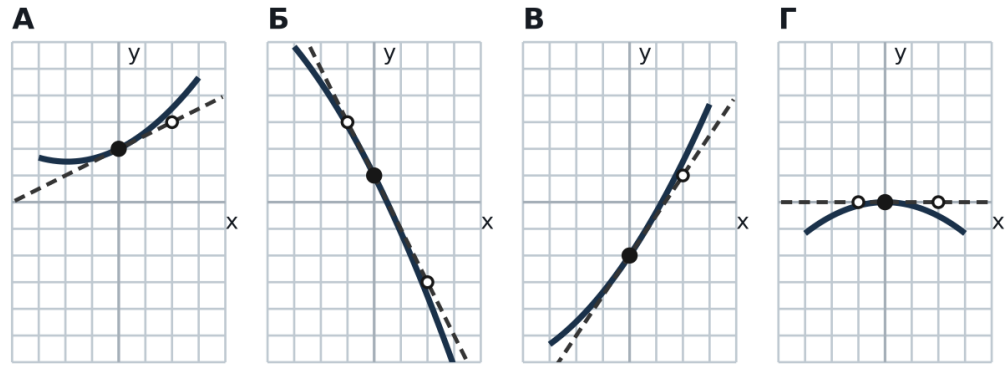
Шаг 3. Чай остывает быстро, пока горячий, и всё медленнее потом: убывающая кривая с выполаживанием — график Б.

Шаг 4. В порядке букв: А—3, Б—4, В—2, Г—1.

Ответ: 3421.

Прототип 3 — производная по касательным. На рисунке 3 к графикам функций в отмеченных точках проведены касательные. Сопоставьте каждую касательную А–Г со значением производной в отмеченной точке.

1) −2; 2) 0; 3) 0,5; 4) 1,5.



Одинаковый масштаб обеих осей. Пунктиром показаны касательные.

Рис. 3

Шаг 1. Ищем две удобные точки на пунктирной прямой. У касательной А при движении на 2 клетки вправо высота увеличивается на 1 клетку. Наклон равен 1 : 2 = 0,5. Получаем А—3.

Шаг 2. Касательная Б уходит вниз на 4 клетки за 2 клетки вправо. Наклон равен −4 : 2 = −2. Получаем Б—1.

Шаг 3. Касательная В поднимается на 3 клетки за 2 вправо. Наклон равен 3 : 2 = 1,5. Касательная Г горизонтальна, поэтому её наклон равен нулю. Получаем В—4 и Г—2.

Шаг 4. Записываем цифры в порядке букв.

Ответ: 3142.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

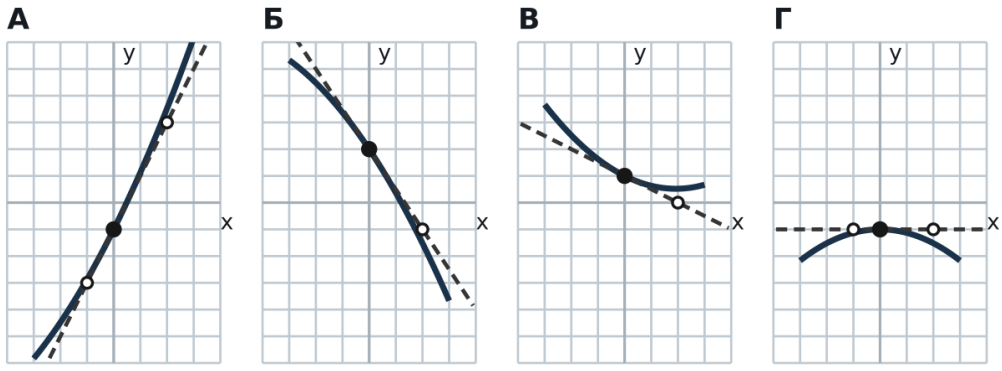
1) По рисунку 1: в каком году объём производства был наибольшим?

2) По рисунку 1: сколько лет подряд объём производства падал после 2018 года?

3) По рисунку 2: какой из графиков соответствует объёму воды в баке, который равномерно наполняют? В ответе укажите номер графика: 1 — А, 2 — Б, 3 — В, 4 — Г.

4) На рисунке 4 показаны ещё четыре касательные. Сопоставьте касательные А–Г со значениями производной в отмеченных точках.

1) 0; 2) −1,5; 3) 2; 4) −0,5.



Одинаковый масштаб обеих осей. Пунктиром показаны касательные.

Рис. 4

Задание 8. Верю — не верю

Что следует из сравнений

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=practice-logic-order



Что хотят. Прочитать три-четыре факта («сосна выше ели, но ниже кедра») и выбрать ВСЕ утверждения, которые из них строго следуют. Это единственное задание экзамена, где математика притворяется настольной игрой: перед вами четыре карты, и нужно угадать, какие из них краплёные.

Классическая ловушка. Достроить порядок в голове. Про сборные А и Б всё сказано, про В и Г — по половинке, и мозг услужливо дорисовывает: «ну наверное, Г меньше Б». В условии этого НЕТ. Если две величины не связаны цепочкой сравнений — ни одно утверждение об их сравнении не доказано, каким бы правдоподобным оно ни звучало. Правдоподобно и доказано — разные вещи; балл дают за второе.

Вредный совет. «Читай утверждения сердцем: правдоподобное — верно, скучное — тем более верно».

А теперь серьёзно. Два инструмента закрывают главу. Первый — подстановка: замените слова конкретными числами (ель — 10 метров, тогда сосна — 13, кедр — 15,5), и половина утверждений проверяется устно. Второй — контрпример: чтобы отвергнуть утверждение вида «любой, кто…, также…», достаточно ОДНОГО придуманного нарушителя. И правило направления: всякий, кто ниже меньшего, ниже и большего — это работает; в обратную сторону — нет.

Карта темы

Четыре стола игрового клуба.

- **Цепочки сравнений.** Рост, возраст, температура: все участники связаны в одну лесенку. Подстановка помогает увидеть порядок и найти контрпример. Общее утверждение доказывайте по цепочке сравнений.
- **Частичный порядок.** Медали сборных: часть пар сравнена, часть — нет. Рисуйте стрелочки; несравнимые пары — минное поле для утверждений.
- **«Любой… также…».** Утверждения о посторонних участниках: проверяются через направление (от меньшего к большему) или убиваются одним контрпримером.
- **Формат.** В ответ идут ВСЕ верные номера, без пробелов и запятых. Сначала проверьте каждое утверждение и запишите цифры подряд. Для самопроверок в этой главе ответы приведены в порядке возрастания.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — цепочка. Сосна на 3 метра выше ели. До вершины кедра ей не хватает ещё 2,5 метра. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях:

1) кедр выше ели на 5,5 метра; 2) ель выше кедра; 3) любое дерево, которое ниже ели, также ниже сосны; 4) любое дерево, которое ниже сосны, также ниже ели.

Шаг 1. Подстановка: пусть ель — 10 м. Тогда сосна — 13 м, кедр — 15,5 м.

Шаг 2. Утверждение 1 верно: 3 + 2,5 = 5,5. Утверждение 2 неверно: кедр выше сосны, а сосна выше ели.

Шаг 3. Утверждение 3: ниже 10 — значит, ниже 13. От меньшего к большему — работает, верно.

Шаг 4. Утверждение 4: контрпример — берёзка высотой 11 м. Ниже сосны? Да. Ниже ели? Нет. Один нарушитель — и утверждение разжаловано.

Ответ: 13.

Прототип 2 — частичный порядок. На соревнованиях сборная А завоевала медалей больше, чем сборная Б; сборная В — меньше, чем Б; сборная Г — меньше, чем А. Выберите все верные утверждения:

1) сборная В завоевала меньше медалей, чем сборная А; 2) сборная Б заняла второе место по числу медалей среди четырёх сборных; 3) среди четырёх сборных есть три, завоевавшие поровну медалей; 4) сборная А завоевала больше медалей, чем каждая из остальных трёх сборных.

Шаг 1. Рисуем цепочку: В < Б < А, и отдельная ветка Г < А. Про пару Б и Г — тишина.

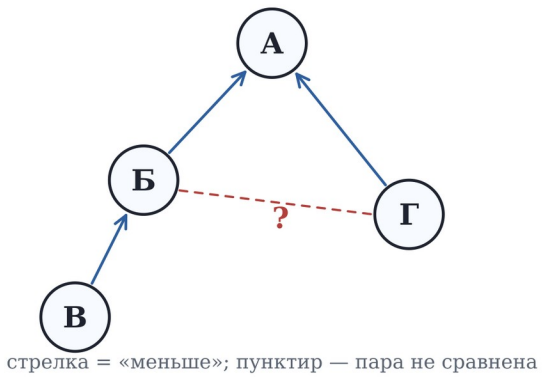


Рис. 1

Шаг 2. Утверждение 1: В < Б < А — по цепочке верно. Утверждение 4: А больше Б, больше В, больше Г — все три сравнения есть, верно.

Шаг 3. Утверждение 2: а вдруг Г обошла Б? Подстановка: А = 10, Б = 5, В = 1, Г = 7 — и Б уже третья. Не следует.

Шаг 4. Утверждение 3: цепочка В < Б < А строгая, три равных не собрать. Неверно.

Ответ: 14.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Коле 13 лет, Витя на 4 года старше Коли, Диме 16 лет. Выберите все верные утверждения: 1) Коля старше Димы; 2) Витя на год старше Димы; 3) любой ровесник Коли старше Вити; 4) любой, кто младше Димы, младше Вити.

2) В городе N температура была 5°, в городе P — на 7° холоднее, чем в N, а в городе Q — на 2° теплее, чем в N. Выберите все верные утверждения: 1) в городе P было −2°; 2) в Q было теплее, чем в P; 3) в P было теплее, чем в N; 4) в любом городе, где было теплее, чем в Q, было теплее, чем и в P.

Часть вторая. Геометрия: от клеточки до объёма

Задание 9. Клеточка возвращается

Тренажёр к заданию 9

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=grid

Что хотят. Найти площадь фигуры на клетчатом плане местности: участок, сад, озеро. Клеточка из школьной тетради выросла и устроилась в кадастровую палату: теперь каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. А иногда — 10 м × 10 м, и вот здесь начинается самое интересное.

Классическая ловушка. Масштаб. Если клетка — это квадрат 10 × 10 метров, то одна клетка — не 10 квадратных метров, а 100: десять на десять. Насчитали 9 клеток — это 900 м², и никак иначе. Половина потерянных баллов в этом задании — не про геометрию, а про забытое умножение в самом конце.

Вредный совет. «Метры, клетки — какая разница. Площадь — это сколько клеточек, остальное бюрократия».

А теперь серьёзно. Работайте в два действия. Первое: найдите площадь в клетках — разрезанием или «коробочкой», как в прошлом сезоне. Второе: умножьте на площадь одной клетки. Первое действие все делают, второе — забывают. Пусть фраза «а теперь переведём клетки в метры» станет рефлексом, как проверка выключенного утюга.

Карта темы

Пять приёмов клетчатого плана.

- **Разрезание.** Ступенчатый участок режем на прямоугольники — или достраиваем до большого прямоугольника и вычитаем вырезы. Площадь собирается, как из деталей конструктора.
- **«Коробочка» — ветеран прошлого сезона.** Косая фигура достраивается до прямоугольника, лишние прямоугольные треугольники вычитаются. По-прежнему работает почти всегда, ошибок по-прежнему почти никогда.
- **Масштаб.** Клетка 1 × 1 м — клетки и есть квадратные метры. Клетка 10 × 10 м — каждая клетка стоит 100 м². Читайте условие до конца: масштаб прячется в первой строчке, а мстит в последней.
- **Два круга.** Внутренний круг известной площади, внешний — вдвое-втрое шире по клеткам. Площади кругов относятся как квадраты радиусов: радиус вдвое больше — площадь вчетверо. Заштрихованное кольцо — это разность.
- **Приближённая площадь.** Для криволинейной фигуры считайте целые клетки и оценивайте сумму неполных. Складывайте примерно половинные клетки

попарно. Округляйте площадь так, как сказано в условии. Разбор озера ниже показывает точную площадь многоугольника.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — разрезание. На схеме отмечена зона, которую нужно замостить. Сторона клетки соответствует 2 м. Сколько квадратных метров предстоит замостить? (рис. 1)

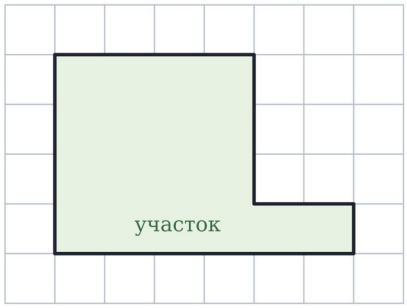


Рис. 1

Шаг 1. Достраиваем участок до полного прямоугольника: 6 · 4 = 24 клетки.

Шаг 2. Вычитаем вырез: 2 · 3 = 6 клеток. Остаётся 24 − 6 = 18 клеток.

Шаг 3. Переводим клетки в метры: площадь клетки 2 · 2 = 4 м². Общая площадь равна 18 · 4 = 72 м².

Ответ: 72.

Прототип 2 — «коробочка». Каждая клетка — квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь газона в квадратных метрах. (рис. 2)

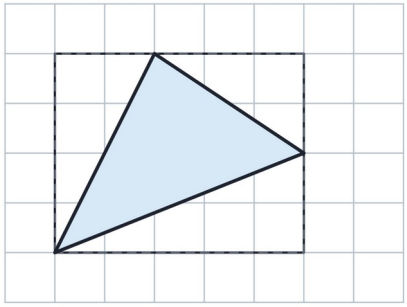


Рис. 2

Шаг 1. Достраиваем треугольник до прямоугольника-коробочки: 5 · 4 = 20.

Шаг 2. Внутри коробочки, кроме газона, — три прямоугольных треугольника по углам. Считаем по клеткам: 5 · 2 / 2 = 5; 3 · 2 / 2 = 3; 2 · 4 / 2 = 4. Вместе: 12.

Шаг 3. Вычитаем лишнее: 20 − 12 = 8. Клетка метровая — значит, 8 м².

Ответ: 8.

Прототип 3 — масштаб. План разбит на клетки, каждая клетка — квадрат 10 м × 10 м. Найдите площадь озера в квадратных метрах. (рис. 3)

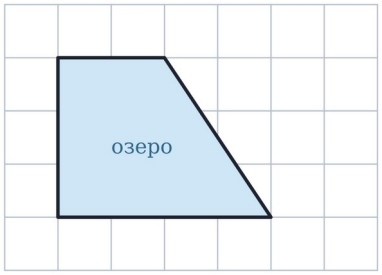


Рис. 3

Шаг 1. Площадь в клетках: прямоугольник $4 \cdot 3 = 12$, срезанный угол $2 \cdot 3 / 2 = 3$. Остаётся $12 - 3 = 9$ клеток.

Шаг 2. Цена одной клетки: $10 \cdot 10 = 100$ м².

Шаг 3. Переводим: $9 \cdot 100 = 900$ м². Не 90 — вот она, ловушка главы, в естественной среде обитания.

Ответ: 900.

Прототип 4 — два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры. (рис. 4)

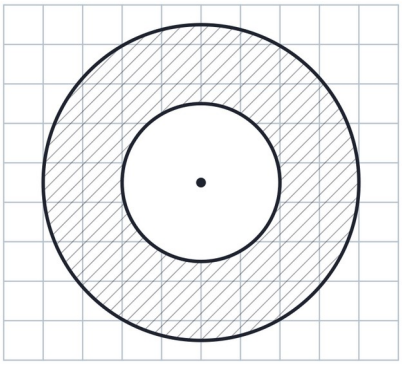


Рис. 4

Шаг 1. Считываем радиусы по клеткам: 2 и 4. Внешний радиус вдвое больше.

Шаг 2. Площади кругов относятся как квадраты радиусов: радиус вдвое — площадь вчетверо. Внешний круг: $12 \cdot 4 = 48$.

Шаг 3. Кольцо — это разность: $48 - 12 = 36$.

Ответ: 36.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Участок — прямоугольник 6 × 5 клеток с вырезанным углом 2 × 2. Клетка — 1 × 1 м. Найдите площадь в квадратных метрах.

2) Треугольная клумба: катеты идут по линиям сетки, 6 и 3 клетки. Клетка — 1 × 1 м. Найдите площадь.

3) Та же клумба, но на плане с клеткой 10 × 10 м. Найдите площадь в квадратных метрах.

4) Два круга на клетчатой бумаге: площадь внутреннего равна 5, его радиус — 1 клетка, радиус внешнего — 3 клетки. Найдите площадь заштрихованного кольца между ними.

5) На плане клетка соответствует квадрату со стороной 2 м. Участок занимает квадрат 5 × 5 клеток с вырезанным у одного края прямоугольником 1 × 3 клетки. Найдите площадь участка в квадратных метрах.

Задание 10. Геометрия во дворе

Тренажёр к заданию 10

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=practical

Что хотят. Решить геометрию, которая растёт прямо из земли: лестница у стены, провод от столба к дому, тень от фонаря, спицы колеса и дачный участок. Все чертежи здесь — фотографии обычной жизни, просто с подписанными длинами.

Классическая ловушка. Треугольник, висящий в воздухе. Провод натянут от верхушки столба к стене — но закреплён не у земли, а на высоте. Вертикальный катет прямоугольного треугольника — это РАЗНОСТЬ высот, а не вся высота столба. Кто забывает вычесть (а в конце — прибавить обратно), получает столб на два метра короче реального.

Вредный совет. «Если в задаче есть картинка, ответ можно измерить линейкой прямо на ней».

А теперь серьёзно. Во дворе работают три инструмента. Пифагор — для всего натянутого и прислонённого: найдите прямоугольный треугольник, при необходимости достройте его пунктиром. Подобие — для света и склонов: луч фонаря создаёт два треугольника с общим углом, и их стороны пропорциональны. Часовая арифметика — для циферблатов и колёс: круг — это 360°, делите на количество частей. И держите под рукой дежурные тройки из главы про планиметрию: 3–4–5 со всей роднёй живёт и во дворе.

Карта темы

Четыре жанра дворовой геометрии.

- **Пифагор на местности.** Лестницы, провода, экраны телевизоров, транспортёры между зданиями. Фирменный ход — «этажерка высот»: катет равен разности высот креплений.
- **Подобие.** Фонарь и тень, горка с подпирающим столбом. Отношение «высота к тени» одинаково для человека и фонаря — свет честен со всеми.
- **Углы по кругу.** Часы: циферблат — 12 делений по 30°. Колёса: 360° делим на число спиц — или наоборот, спицы находим делением.
- **Площади участков.** Участок минус постройки: большой прямоугольник минус маленькие. Знакомый принцип вырезания из главы про клеточку — только теперь в настоящих метрах.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — этажерка высот. Провод длиной 10 м натянут от верхушки вертикального столба до точки на стене дома на высоте 2 м над землёй. Дом и столб стоят на одном уровне. Расстояние по горизонтали от столба до стены равно 8 м. Найдите высоту столба. Ответ дайте в метрах. (рис. 1)

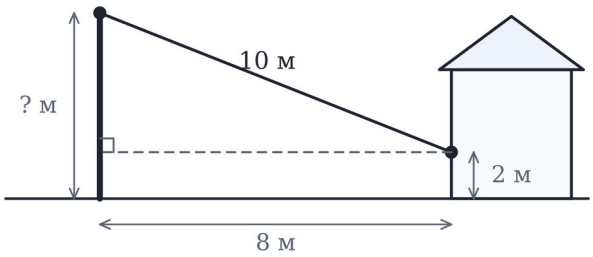


Рис. 1

Шаг 1. Достраиваем прямоугольный треугольник: проводим горизонталь от точки крепления к столбу. Гипотенуза — провод, 10 м; горизонтальный катет — 8 м.

Шаг 2. Вертикальный катет по Пифагору: $\sqrt{(10^2 - 8^2)} = \sqrt{36} = 6$. Тройка 6–8–10 отработала смену.

Шаг 3. Это высота столба НАД точкой крепления. Возвращаем этажерку на место: 6 + 2 = 8.

Ответ: 8.

Прототип 2 — фонарь и тень. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 6 м от уличного фонаря. Длина его тени равна 3 м. Определите высоту фонаря. Ответ дайте в метрах. (рис. 2)

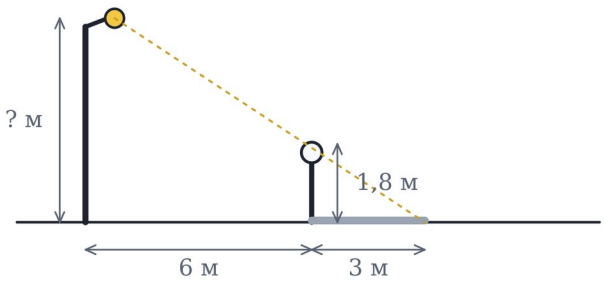


Рис. 2

Шаг 1. Луч света рисует два подобных треугольника: маленький — человек и его тень, большой — фонарь и вся линия от его основания до конца тени.

Шаг 2. Коэффициент света: рост к тени — 1,8 / 3 = 0,6. Столько метров высоты приходится на каждый метр тени.

Шаг 3. Основание большого треугольника: 6 + 3 = 9 м. Высота фонаря: 9 · 0,6 = 5,4.

Ответ: 5,4.

Прототип 3 — часы. На настенных часах 14:20. Проведите лучи вдоль стрелок от общей оси. Найдите меньший из двух углов между лучами. Ответ дайте в градусах.

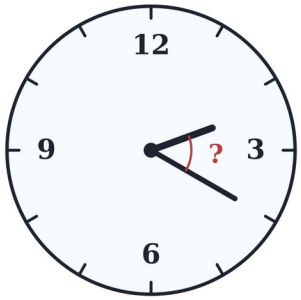


Рис. 3

Шаг 1. Отметка «12» — начало отсчёта. За минуту длинная стрелка проходит 360° : 60 = 6°. За 20 минут она повернулась на 120°.

Шаг 2. В 14:00 короткая стрелка была на отметке «2», то есть в 60° от начала отсчёта. За 20 минут она прошла треть деления между «2» и «3»: 30° : 3 = 10°. Её направление — 70°.

Шаг 3. Разность направлений равна 120° − 70° = 50°. Это и есть меньший угол.

Ответ: 50.

Прототип 4 — участок. Для центра отдыха отвели прямоугольную площадку размером 36 м на 27 м. На ней стоят квадратный павильон со стороной 11 м и квадратная песочница со стороной 4 м. Эти зоны не пересекаются. Сколько квадратных метров площадки можно занять газоном за пределами павильона и песочницы?

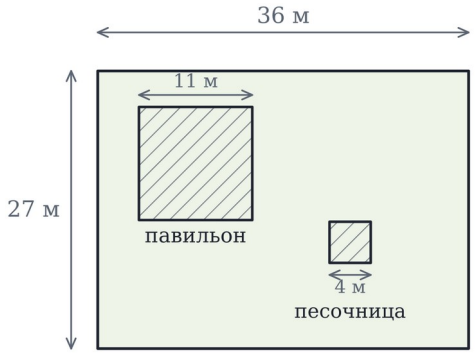


Рис. 4

Шаг 1. Площадь всей площадки равна 36 · 27 = 972 м².

Шаг 2. Под павильоном 11² = 121 м². Песочница занимает 4² = 16 м². Всего из площади площадки нужно вычесть 121 + 16 = 137 м².

Шаг 3. Площадь для газона равна 972 − 137 = 835 м².

Ответ: 835.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Лестницу длиной 6,5 м приставили к стене; нижний конец отстоит от стены на 2,5 м. На какой высоте находится верхний конец лестницы?

2) Прямоугольная крышка коробки имеет диагональ 65 см. Её короткая сторона равна 33 см. Какова длина длинной стороны в сантиметрах?

3) По краю круглой детали размещены 20 отверстий через равные промежутки. Соединили центр с первым и третьим отверстиями, считая по кругу. Найдите меньший угол между этими отрезками в градусах.

4) В школьном дворе размером 32 м на 24 м выделили квадратную клумбу со стороной 7 м. Остальную часть двора замостят. Сколько квадратных метров нужно замостить?

5) На горизонтальной площадке вертикальный столб высотой 9 м отбрасывает тень длиной 6 м. В тот же момент тень от вертикальной антенны равна 14 м. Найдите высоту антенны в метрах.

Задание 11. Коробки, баки и другие объёмы

Тренажёр к заданию 11

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=box

Что хотят. Посчитать объём или поверхность у предметов из хозяйственного магазина: бак, кружка, деталь, крыша, труба. Стереометрия здесь ходит в рабочей одежде, а ответы измеряются в литрах и квадратных сантиметрах.

Классическая ловушка. При переливании в цилиндр с вдвое большим радиусом кажется, что слой станет вдвое ниже. Но площадь дна увеличивается в $2^2 = 4$ раза, а воды осталось столько же. Поэтому высота слоя уменьшается в четыре раза.

Вредный совет. «Литры, миллилитры, кубические сантиметры — это всё объём. Пиши число, единицы сами подтянутся».

А теперь серьёзно. Два перевода наизусть: 1 литр = 1000 см³, 1 м³ = 1000 литров. Один принцип для сосудов: у цилиндра и призмы $V = S \cdot h$, поэтому при том же объёме уровень обратно пропорционален площади основания. И одно правило для сосуда в форме конуса с вершиной внизу: жидкость до половины высоты образует подобный конус, а объёмы подобных тел относятся как кубы: $(1/2)^3 = 1/8$ сосуда. Куб подобия ещё вернётся в главе про стереометрию — считайте это спойлером.

Карта темы

Пять полок хозяйственного магазина.

- **Баки и переливания.** $V = S \cdot h$, переводы в литры, уровень против площади основания.
- **Конус-сосуд с вершиной внизу.** Доля объёма жидкости равна кубу доли высоты: треть высоты — 1/27 объёма, половина — 1/8.
- **Кружки и коробки на сравнение.** «Первая выше, вторая шире»: высоты входят в объём в первой степени, ширины — во второй. Дробь составляется до всяких вычислений.
- **Деталь с прямыми углами.** Ступенчатый многогранник режется на параллелепипеды — как участок на прямоугольники в главе про двор, только в объёме.
- **Покраска.** Куб без грани, двускатная крыша, труба. Общий ход: понять, ИЗ каких плоских кусков состоит поверхность, и сложить их. Скат крыши добывается Пифагором.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — переливание. В лаборатории пересыпали весь мелкий песок из узкой цилиндрической ёмкости в широкую. Диаметр широкой ёмкости в полтора раза больше диаметра узкой. До пересыпания ровный слой песка был высотой 72 см. Объём песка при пересыпании не изменился. Какова высота выровненного слоя в широкой ёмкости? Ответ дайте в сантиметрах. (рис. 1)

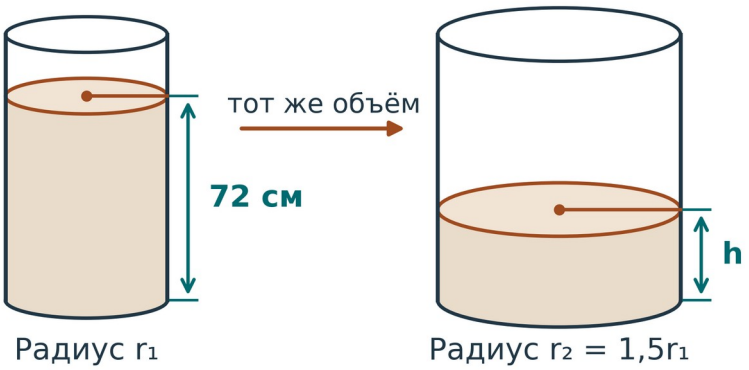


Рис. 1. Шире дно — тоньше слой того же песка.

Шаг 1. На рисунке 72 см — высота слоя в узкой ёмкости, h — высота в широкой. Площади дна обозначим S_1 и S_2. Песка столько же, поэтому $S_1 \cdot 72 = S_2 \cdot h$.

Шаг 2. Диаметр и радиус увеличились в одинаковое число раз: $r_2 = 1{,}5r_1$. Площадь круга равна πr^2. Значит, $S_2 = 1{,}5^2 S_1 = 2{,}25S_1$.

Шаг 3. Подставим вместо S_2 выражение $2{,}25S_1$ и сократим обе части на S_1. Останется $72 = 2{,}25h$. Значит, $h = 72 : 2{,}25 = 32$ см. Делим сантиметры на число без единиц: 2,25 — это отношение двух площадей.

Ответ: 32.

Прототип 2 — вместимость бункера. Зерновой бункер имеет форму конуса с вершиной внизу. Когда в него насыпали 96 л зерна, его ровная поверхность дошла до метки на высоте двух третей бункера от вершины. Сколько литров зерна помещается в бункере, если насыпать его до верхнего края?

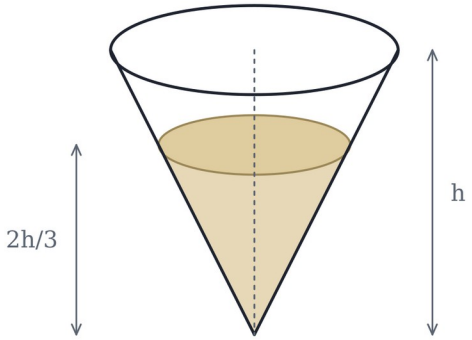


Рис. 2

Шаг 1. Зерно занимает малый конус внутри бункера. Отношение его высоты к высоте бункера равно 2/3.

Шаг 2. Эти конусы подобны. Малый конус занимает $(2/3)^3 = 8/27$ полного объёма.

Шаг 3. Восемь двадцать седьмых объёма — это 96 л. Полный объём равен $96 : (8/27) = 324$ л.

Ответ: 324.

Прототип 3 — ступенчатая подставка. Подставку вырезали из прямоугольного бруска той же ширины, глубины и полной высоты, что и готовая деталь. Глубина подставки одинакова по всей ширине. На эскизе размеры даны в сантиметрах. Сколько кубических сантиметров материала удалили?

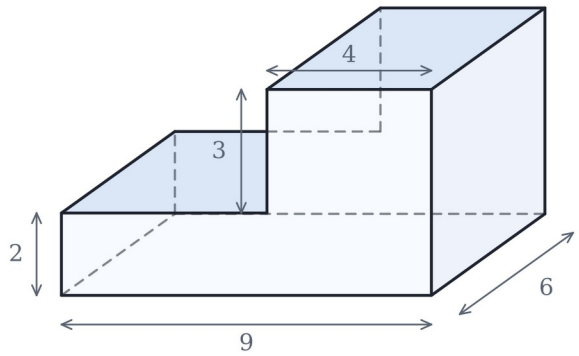


Рис. 3

Шаг 1. Сложим высоты ярусов: $2 + 3 = 5$ см. Изначальный брусок имел объём $9 \cdot 6 \cdot 5 = 270$ см³.

Шаг 2. Нижний ярус подставки имеет объём $9 \cdot 6 \cdot 2 = 108$ см³, верхний — $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$ см³. Всего осталось $108 + 72 = 180$ см³.

Шаг 3. Из бруска удалили $270 - 180 = 90$ см³. Можно также посчитать только вырезанную часть: $(9 - 4) \cdot 6 \cdot 3 = 90$ см³.

Ответ: 90.

Прототип 4 — крыша. На торце мастерской расстояние между нижними краями двух скатов равно 7,2 м. Конёк расположен над серединой этого отрезка и поднимается над ним на 4,8 м. Длина конька равна 12 м. Оба ската прямоугольные. Кровельщик уже закрыл 30 м² одного ската и 21 м² другого. Какую площадь в квадратных метрах ему ещё предстоит закрыть?

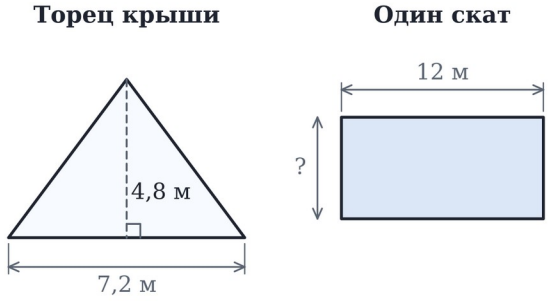


Рис. 4

Шаг 1. На торце проведём высоту из конька. Половина пролёта равна 7,2 : 2 = 3,6 м. Вместе с высотой 4,8 м она даёт два катета; длина ската от конька до края — гипотенуза.

Шаг 2. По теореме Пифагора квадрат длины ската равен $3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$. Значит, его длина равна 6 м.

Шаг 3. Каждый скат имеет площадь $12 \cdot 6 = 72$ м², оба вместе — 144 м². Уже закрыто $30 + 21 = 51$ м². Остаётся $144 - 51 = 93$ м².

Ответ: 93.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) В цистерне с вертикальными стенками площадь дна составляет 240 см². Воду налили до отметки на высоте 25 см от дна. Сколько литров воды в цистерне?

2) Обе кружки считаем цилиндрами. Первая кружка вдвое выше второй, а диаметр второй вдвое больше диаметра первой. Во сколько раз объём второй кружки больше объёма первой?

3) Ящик в форме куба с ребром 30 см, без крышки, красят снаружи со всех сторон. Найдите площадь окрашиваемой поверхности в квадратных сантиметрах.

4) Мерка в форме конуса поставлена вершиной вниз. Её высота равна 20 см, а поверхность воды находится на высоте 8 см над вершиной. Сколько миллилитров воды надо долить до краёв мерки, если её вместимость равна 875 мл?

5) В прямоугольном баке с основанием 35 см на 20 см уровень воды поднялся с 8 см до 14 см. Сколько литров воды долили?

Задание 12. Вся плоская компания в сборе

Тренажёр к заданию 12

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=triangle

Что хотят. Найти угол, сторону или площадь у плоской фигуры. Три главы прошлого сезона — треугольник, окружность и семья четырёхугольников — съехались в одну коммуналку, а к ним подселился новичок: правильный многоугольник. Компания большая, но правила общежития простые.

Классическая ловушка. Половина основания. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, делит его пополам — и прямоугольный треугольник для Пифагора или тангенса образуют высота и ПОЛОВИНА основания. Кто подставляет всё основание вместо его половины, меняет один катет и получает неверный ответ.

Вредный совет. «Рисунок в геометрии — для слабаков. Настоящие математики держат фигуры внутренним взором».

А теперь серьёзно. Два рефлекса решают половину раздела. Первый: нарисовать и подписать — все данные из условия переезжают на картинку. Второй: провести высоту. В равнобедренном треугольнике высота к основанию делит его пополам; в трапеции она отрезает прямоугольный треугольник от «лишней» части основания. А дальше в дело вступают Пифагор или тригонометрия — и здесь экономят время дежурные тройки: 3–4–5 и её родня 6–8–10, 9–12–15, 5–12–13. Если два числа похожи на знакомую тройку, проверьте роли сторон. Например, числа 3 и 4 дают гипотенузу 5, когда оба числа — катеты.

Карта темы

Четыре комнаты коммуналки.

- **Треугольники.** Пять железных фактов прошлого сезона в силе: сумма углов 180°; внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним; в равнобедренном углы при основании равны; против большей стороны — больший угол; острые углы прямоугольного треугольника в сумме дают 90°. Новый уровень: тригонометрия острого угла — синус это противолежащий катет к гипотенузе, косинус — прилежащий, тангенс — их частное. В базе им дают «красивые» значения из дежурных троек.
- **Четырёхугольники.** Семейное досье в сжатом виде: у любого параллелограмма противоположные стороны и углы равны, соседние углы в сумме дают 180°, диагонали точкой пересечения делятся пополам; прямоугольник добавляет равные диагонали; ромб — перпендикулярные, делящие углы пополам (его площадь — половина произведения диагоналей). Трапеция в семье не состоит,

но владеет средней линией — полусуммой оснований — и любит, когда ей проводят высоту.

- **Окружность.** Вписанный угол равен половине центрального, если оба смотрят на одну дугу; угол, опирающийся на диаметр, — прямой; касательная перпендикулярна радиусу в точке касания. Новое в базе: дуги пропорциональны центральным углам — дуга в одну пятую окружности разворачивается на 360°/5 градусов.
- **Правильные многоугольники — новичок.** Один факт закрывает все его задачи: угол правильного n-угольника равен 180°·(n − 2)/n. У шестиугольника — 120°, у восьмиугольника — 135°.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — равнобедренный треугольник с тригонометрией. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны 10, cos A = 0,8. Найдите площадь треугольника. (рис. 1)

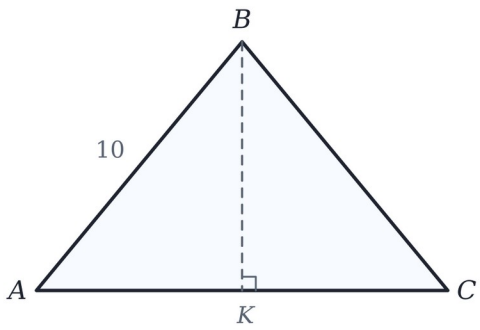


Рис. 1

Шаг 1. Проводим высоту BK к основанию — она же медиана, основание делится пополам.

Шаг 2. В прямоугольном треугольнике ABK: прилежащий катет AK = AB · cos A = 10 · 0,8 = 8.

Шаг 3. Тройка 6–8–10 на службе: BK = 6. Кто не доверяет тройкам — Пифагор: √(100 − 64) = 6.

Шаг 4. Основание: AC = 2 · AK = 16. Площадь: 16 · 6 / 2 = 48.

Ответ: 48.

Прототип 2 — прямоугольный треугольник. Площадь прямоугольного треугольника равна 96, один из катетов равен 12. Найдите гипотенузу. (рис. 2)

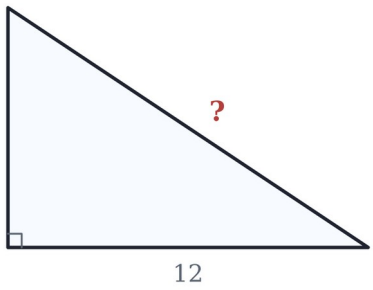


Рис. 2

Шаг 1. Площадь — половина произведения катетов: второй катет равен $2 \cdot 96 / 12 = 16$.

Шаг 2. Пифагор: гипотенуза$^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400$.

Шаг 3. Гипотенуза = 20. Это тройка 3–4–5, увеличенная вчетверо, — она была видна ещё на втором шаге.

Ответ: 20.

Прототип 3 — трапеция. Основания равнобедренной трапеции равны 8 и 18, высота равна 12. Найдите тангенс острого угла трапеции. (рис. 3)

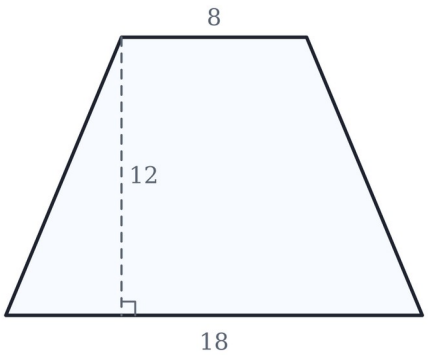


Рис. 3

Шаг 1. Проводим высоту — она отрезает прямоугольный треугольник.

Шаг 2. Горизонтальный катет — «лишняя» часть основания, у равнобедренной трапеции она делится на два равных куска: $(18 - 8) / 2 = 5$.

Шаг 3. Тангенс — противолежащий к прилежащему: $12 / 5 = 2{,}4$.

Ответ: 2,4.

Прототип 4 — окружность и дуга. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна 1/5 длины окружности. Ответ дайте в градусах. (рис. 4)

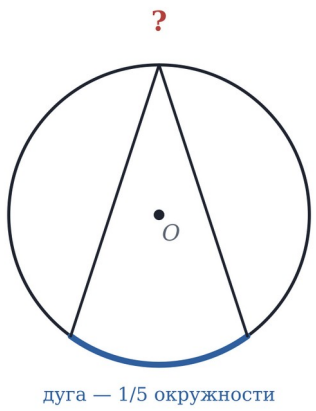


Рис. 4

Шаг 1. Вся окружность — 360°. Дуга в одну пятую разворачивается на 360 / 5 = 72°: столько в центральном угле.

Шаг 2. Вписанный угол — половина центрального, смотрящего на ту же дугу: 72 / 2 = 36°.

Ответ: 36.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 40°. Найдите угол при основании.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите гипотенузу.

3) Диагонали ромба равны 10 и 24. Найдите сторону ромба.

4) Найдите угол правильного шестиугольника. Ответ дайте в градусах.

5) Центральный угол равен 148°. Найдите вписанный угол, опирающийся на ту же дугу.

6) В параллелограмме ABCD сторона AB равна 12, а высота, проведённая из вершины D к прямой AB, равна 5. Найдите площадь параллелограмма.

Задание 13. Выход в объём

Тренажёр к заданию 13

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=scale

Что хотят. Найти объём или площадь поверхности у классических тел: параллелепипед, призма, пирамида, цилиндр, конус, шар. В справочных материалах к экзамену есть формулы объёмов и некоторые формулы площадей. Полную поверхность прямоугольного параллелепипеда можно собрать из площадей его шести граней.

Классическая ловушка. Куб подобия. Радиус одного шара втрое больше, чем у другого, — и рука пишет: объём больше втрое. Объём больше в $3^3 = 27$ раз: объёмы подобных тел относятся как КУБЫ линейных размеров, площади поверхностей — как квадраты. Втрое длиннее — вдевятеро просторнее — в двадцать семь раз вместительнее. Это правило уже мелькало в главе про сосуды; здесь оно выходит на главную роль.

Вредный совет. «Формулы объёмов учить не надо — их выдадут. Читать выданное тоже не надо — ты и так примерно помнишь».

А теперь серьёзно. Работайте в связке со справочными материалами: опознали тело → нашли его формулу на выданном листе → подписали числа под буквами (ритуал стаканчиков из главы про формулы прекрасно чувствует себя в трёхмерье) → посчитали. Отдельно стерегите три вечно теряемых множителя: одну треть у пирамиды и конуса, число π у круглых тел и куб подобия у похожих тел.

Карта темы

Шесть жильцов объёмного мира.

- **Параллелепипед и призма.** $V = S \cdot h$ — площадь основания на высоту. Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда: $2(ab + bc + ac)$ — три пары одинаковых граней.
- **Пирамида и конус.** Та же песня с коэффициентом 1/3: $V = S \cdot h/3$. Обратные задачи решаются переворотом: $h = 3V/S$.
- **Цилиндр.** $V = \pi r^2 h$; боковая поверхность — $2\pi r \cdot h$. При сравнении двух цилиндров радиусы входят в квадрате, высоты — в первой степени.
- **Конус и сечение.** Плоскость, параллельная основанию и проходящая на трети высоты от вершины, отсекает маленький конус — подобный, в $(1/3)^3 = 1/27$ объёма. Куб подобия в естественной среде.
- **Шар.** $V = (4/3)\pi R^3$, поверхность — $4\pi R^2$. Радиусы 3 : 1 — объёмы 27 : 1, поверхности 9 : 1.

- **Куб.** Почётный житель: $V = a^3$. Из его вершин и середин рёбер составители любят вырезать маленькие пирамидки — ищите боковое ребро, перпендикулярное основанию. Его длина даёт высоту пирамиды.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — параллелепипед. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 3, 4 и 6. (рис. 1)

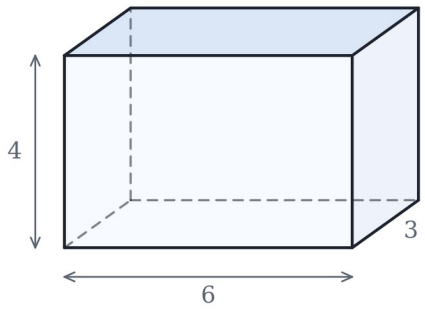


Рис. 1

Шаг 1. Поверхность — три пары граней: $2(ab + bc + ac)$.

Шаг 2. Считаем пары: $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 6 = 24$, $3 \cdot 6 = 18$. Сумма: 54.

Шаг 3. Удваиваем: $2 \cdot 54 = 108$.

Ответ: 108.

Прототип 2 — пирамида, обратный ход. Основанием четырёхугольной пирамиды является прямоугольник со сторонами 6 и 5. Объём пирамиды равен 40. Найдите её высоту. (рис. 2)

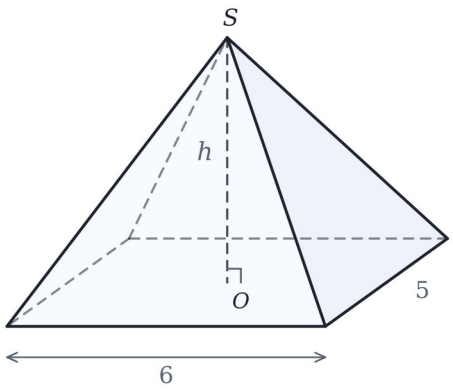


Рис. 2

Шаг 1. Из формулы $V = S \cdot h / 3$ получаем $3V = S \cdot h$. Делим обе части на площадь основания: $h = 3V / S$.

Шаг 2. Площадь основания: $6 \cdot 5 = 30$.

Шаг 3. Высота: $h = 3 \cdot 40 / 30 = 4$. Одна треть не потерялась — она была пристёгнута с самого начала.

Ответ: 4.

Прототип 3 — два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 3 и 8, а второго — 6 и 6. Найдите отношение объёма второго цилиндра к объёму первого. (рис. 3)

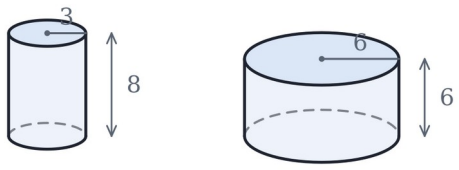


Рис. 3

Шаг 1. Составляем дробь до вычислений: $V_2/V_1 = (r_2^2 \cdot h_2) / (r_1^2 \cdot h_1)$. Число π сокращается, не успев испугать.

Шаг 2. Подставляем: $(36 \cdot 6) / (9 \cdot 8) = 216 / 72$.

Шаг 3. Делим: 3. Радиус — в квадрате, высота — в первой степени; дробь помнит это за вас.

Ответ: 3.

Прототип 4 — два шара. Две круглые заготовки полностью выточены в виде шаров диаметрами 10 и 25 см. Сколько объёмов меньшей заготовки составляет объём большей? (рис. 4)



Рис. 4

Шаг 1. Отношение диаметров равно отношению радиусов: 25 : 10 = 2,5.

Шаг 2. Объёмы подобных тел относятся как кубы: $2{,}5^3 = 15{,}625$.

Ответ: 15,625.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Найдите объём прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 2, 5 и 7.

2) Объём конуса равен 48π, радиус основания равен 4. Найдите высоту конуса.

3) Радиус основания и высота первого цилиндра равны 2 и 9, второго — 6 и 1. Найдите отношение объёма второго цилиндра к объёму первого.

4) Радиус шара увеличили втрое. Во сколько раз увеличилась площадь его поверхности?

5) Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 8 и 3, объём пирамиды равен 56. Найдите высоту.

6) Две подобные пирамиды имеют высоты 6 и 9. Объём меньшей пирамиды равен 32. Найдите объём большей пирамиды.

Часть третья. Арифметика и алгебра: старые знакомые

Задание 14. Дроби: финальный сезон

Тренажёр к заданию 14

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=fractions

Что хотят. Найти значение выражения с дробями — обыкновенными, десятичными или вперемешку. Да, это те самые дроби: сценаристы ЕГЭ решили не менять актёрский состав. Калькулятора по-прежнему нет, а в выданных справочных материалах про дроби ни слова — этот бой принимаете лично вы.

Классическая ловушка. Смешанное выражение — и рука сама тянется перевести всё в десятичные. Так вот: 1/2 = 0,5 — законно, а 1/3 = 0,33 — подлог. Треть не переводится в конечную десятичную дробь, и «примерно» превращает задачу в другую задачу с другим ответом. Перевод без потерь работает только в одну сторону: любую десятичную можно записать обыкновенной, обыкновенную десятичной — далеко не всегда.

Вредный совет. «Зачем выбирать язык? Переводи всё в десятичные: 1/3 — это примерно 0,33, 1/7 — примерно 0,14. Погрешность крошечная, а проверяет всё равно компьютер, у него глаз нет».

А теперь серьёзно. Язык вычислений выбирают по знаменателям. Если в знаменателе несократимой дроби есть только простые множители 2 и 5 — 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 50 — десятичный язык открыт, переводите смело. Появились 3, 6, 7, 9, 11 — работаем в обыкновенных: честный перевод бывает только там, где деление заканчивается. И запомните контрольную лампочку базового ЕГЭ: в задании 14 в бланк записывают целое число или конечную десятичную дробь. Если у вас получилось 5/7 — это не ответ, это сигнал: где-то по дороге потерялся множитель.

Карта темы

В банке у задания четыре подтипа — тренировка идёт по ним же.

- **Обыкновенные дроби.** Комбинации четырёх действий; вся сила — в общем знаменателе и сокращении. Встречаются смешанные числа: целая часть — тоже дробь, просто в пальто. Переводим в неправильную: 2 5/14 = 33/14 — и работаем как обычно.
- **Десятичные дроби.** Главная героиня — запятая. При делении она сдвигается у обоих чисел синхронно, как в парном фигурном катании: поодиночке не считается. При умножении — сосчитать знаки после запятой у обоих множителей и отмерить столько же в ответе.

- **Дробь-этажерка.** Дробь внутри дроби — это не опечатка, это этажерка. Порядок наводим поэтажно: сначала числитель и знаменатель по отдельности, потом вспоминаем, что дробная черта — это деление.
- **Разные записи.** Обыкновенные и десятичные в одном выражении. Здесь и работает правило выбора языка из «А теперь серьёзно».

Две опоры прошлого сезона никуда не делись. Три случая НОК — одной строкой: большее делится на меньшее → НОК и есть большее; взаимно простые → перемножаем; всё остальное → перебираем кратные большего до победы. И второй метод: «метод отчаянного девятиклассника» за два года дослужился до метода отчаянного выпускника — перемножай знаменатели напрямую, работает всегда. Условия сделки прежние: платишь арифметикой за отсутствие раздумий.

Кстати, минус — полноправный жилец бланка ответов, клеточка для него предусмотрена. Получить отрицательное число в задании 14 — нормально; пугаться нужно дробной черты в ответе, а не знака.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — обыкновенные дроби. Найдите значение выражения $7/10 + 5/4 : 25/6$.

Шаг 1. Порядок действий: деление раньше сложения. Начинаем с $5/4 : 25/6$.

Шаг 2. Деление на дробь — умножение на перевёрнутую: $5/4 \cdot 6/25$.

Шаг 3. Сокращаем до умножения: пятёрка уходит в 25, двойка из 6 — в 4. Получается $3/10$.

Шаг 4. Сложение: $7/10 + 3/10 = 10/10 = 1$. Знаменатель один на двоих — складываем только числители.

Ответ: 1.

Прототип 2 — десятичные дроби. Найдите значение выражения $6{,}3 : 0{,}9 - 1{,}4 \cdot 5$.

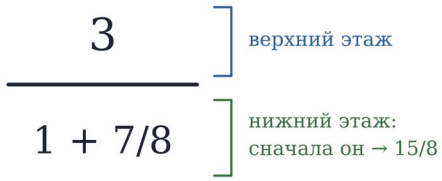
Шаг 1. Деление: сдвигаем запятую у обоих чисел на один знак вправо — $6{,}3 : 0{,}9 = 63 : 9 = 7$. Делить на целое всегда приятнее.

Шаг 2. Умножение: $1{,}4 \cdot 5 = 7$.

Шаг 3. Вычитание: $7 - 7 = 0$.

Ответ: 0. Ноль — тоже ответ, бланк не обидится.

Прототип 3 — этажерка. Найдите значение выражения 3 / (1 + 7/8).



дробная черта — это деление: 3 : 15/8 = 3 · 8/15

Рис. 1

Шаг 1. Наводим порядок на нижнем этаже: 1 + 7/8 = 8/8 + 7/8 = 15/8.

Шаг 2. Дробная черта — это деление: 3 : 15/8 = 3 · 8/15.

Шаг 3. Сокращаем на тройку: 8/5.

Шаг 4. Знаменатель 5 — перевод честный: 8/5 = 1,6. В бланк идёт 1,6.

Ответ: 1,6.

Прототип 4 — разные записи. Найдите значение выражения (7/20 + 0,15) · 6.

Шаг 1. Смотрим на знаменатель: 20 — это двойки и пятёрки, десятичный язык открыт. Переводим: 7/20 = 0,35.

Шаг 2. Скобка: 0,35 + 0,15 = 0,5.

Шаг 3. Умножение: 0,5 · 6 = 3.

Можно было и наоборот: 0,15 = 3/20, тогда 7/20 + 3/20 = 10/20 = 1/2, и 1/2 · 6 = 3. Оба пути честные — выбирайте тот, где меньше шансов потерять запятую.

Ответ: 3.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Вычислите: 3/4 + 5/2 : 10/3.

2) Вычислите: (2,4 − 5,6) : 0,8.

3) Вычислите: 5 / (2 + 6/7).

4) Вычислите: (0,3 + 1/4) · 20.

5) Определите случай НОК и найдите его: а) 8 и 24; б) 7 и 10; в) 10 и 15.

Задание 15. Проценты: вклад в аттестат

Тренажёр к заданию 15

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=percent

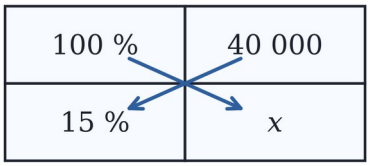
Что хотят. Посчитать проценты из жизни: скидку на чайник, налог с зарплаты, подорожание винограда. Задание щедрое: один приём закрывает все его подтипы — и этот приём вы унесёте с экзамена в реальную жизнь, где он пригодится чаще любого другого из этой книги.

Классическая ловушка. У каждого процента своя база. Цена выросла на 20%, потом ещё на 25% — и рука пишет: всего на 45%. Проверяем: 90 рублей → 108 → 135. Итог — в полтора раза, то есть на 50%. Второе подорожание считалось уже от новой цены. Проценты не складываются между собой: каждый берётся от своего целого.

Вредный совет. «+20% и ещё +25% — это +45%. Проценты складываются, как деньги в копилке».

А теперь серьёзно. Знакомьтесь: крестик 2×2 — фирменный универсальный инструмент. Любая процентная задача помещается в табличку из четырёх клеток: слева проценты, справа величины, и 100% всегда стоит напротив целого:

крестик 2×2



$$x = 40\,000 \cdot 15 / 100$$

диагональ без икса перемножается и делится на соседа икса

Рис. 1

Дальше — крест: перемножаем два числа на диагонали без икса и делим на третье, которое смотрит на икс по диагонали: x = 40 000 · 15 / 100. Крест-накрест уже работал в пропорциях прошлого сезона и в лучах фонаря из главы про двор — теперь у приёма именная табличка. Он ещё вернётся: в уравнениях с дробями и в текстовых задачах последней части.

Карта темы

Четыре подтипа — и все решаются одной табличкой.

- **Часть от числа.** «15% из 40 000 жителей — школьники». 100% напротив всех жителей, икс — напротив 15%.
- **Число по его части.** «13% налога удержали, на руки вышло 20 880». На руки — это 87%: ставим 87 напротив 20 880, икс — напротив 100.

- **Изменение цены.** Сначала новая доля: подорожание на p% — это 100 + p процентов, скидка — 100 − p. Потом крестик. Два изменения подряд — две таблички по очереди, каждая от своей базы.
- **«На сколько процентов».** В правый столбец идут старая цена и разница между ценами; икс — в столбце процентов, напротив разницы.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — часть от числа. В городе 40 000 жителей, причём 15% из них — школьники. Сколько школьников в городе?

Шаг 1. Табличка: 100 % — 40 000; 15 % — x. Сотня — напротив целого, всё на своих местах.

Шаг 2. Крест: x = 40 000 · 15 / 100.

Шаг 3. Удобный порядок: 40 000 / 100 = 400, затем 400 · 15 = 6000.

Ответ: 6000.

Прототип 2 — скидка с продолжением. Набор полотенец стоил 400 рублей и продаётся со скидкой 12%. Сколько рублей стоят два набора со скидкой?

Шаг 1. Новая доля цены: 100 − 12 = 88%.

Шаг 2. Табличка: 100 % — 400; 88 % — x. Крест: x = 400 · 88 / 100 = 352.

Шаг 3. Читаем вопрос до конца: наборов два. 352 · 2 = 704. Половина цены вопроса пряталась в слове «два».

Ответ: 704.

Прототип 3 — число по части. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога Марина получила 20 880 рублей. Сколько рублей составляет её заработная плата?

Шаг 1. На руки выдают не 13%, а остаток: 100 − 13 = 87%.

Шаг 2. Табличка: 87 % — 20 880; 100 % — x. Целое неизвестно — икс стоит напротив сотни.

Шаг 3. Крест: x = 20 880 · 100 / 87 = 24 000. Проверка в обратную сторону: 24 000 · 0,87 = 20 880. Сошлось.

Ответ: 24 000.

Прототип 4 — «на сколько процентов». Кроссовки стоили 4000 рублей, а после уценки стали стоить 3400 рублей. На сколько процентов снизили цену?

Шаг 1. Разница в рублях: 4000 − 3400 = 600.

Шаг 2. Табличка: 4000 — 100 %; 600 — x %. База процентов — СТАРАЯ цена: снижали от неё.

Шаг 3. Крест: x = 600 · 100 / 4000 = 15.

Ответ: 15.

Прототип 5 — деление в данном отношении. Под розы и тюльпаны отвели две клумбы общей площадью 84 м². Площадь клумбы с розами относится к площади клумбы с тюльпанами как 3 : 4. Сколько квадратных метров занимает клумба с тюльпанами?

Шаг 1. Всего 3 + 4 = 7 одинаковых долей. На одну долю приходится 84 : 7 = 12 м².

Шаг 2. Тюльпаны занимают четыре доли: 4 · 12 = 48 м².

Ответ: 48.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Найдите 30% от числа 900.

2) Куртка стоит 3600 рублей. Сколько рублей она будет стоить со скидкой 25%?

3) В технические вузы собираются поступать 54 выпускника, что составляет 45% всех выпускников школы. Сколько всего выпускников в школе?

4) Ежемесячная плата за интернет выросла с 250 до 260 рублей. На сколько процентов выросла плата?

Задание 16. Степени и корни: второй подход к снаряду

Тренажёр к заданию 16

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=functions

Что хотят. Вычислить выражение со степенями и корнями — а теперь ещё с логарифмами и тригонометрией. Да, в качалке для чисел появились новые снаряды. Спокойно: техника выполнения упражнений осталась прежней, просто зал стал больше.

Классическая ловушка. Потерянный знак в тригонометрии. Основное тождество даёт $\sin^2\alpha$. Например, из уравнения $\sin^2\alpha = 0{,}64$ следуют два возможных значения синуса: 0,8 и −0,8. Какой выбрать, говорит четверть, указанная в условии. Кто не читает четверть, теряет минус, а вместе с ним и балл: 0,8 и −0,8 — это очень разные ответы.

Вредный совет. «Новые снаряды — логарифмы и синусы — можно не трогать: в зале главное — жать любимую штангу».

А теперь серьёзно. Устав степеней прошлого сезона действует без поправок: умножение степеней с одним основанием — показатели складываем, деление — вычитаем, степень в степени — перемножаем. Новобранцам — по одной строчке. Логарифм отвечает на вопрос «в какую степень возвести основание, чтобы получить число»: $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$. Тригонометрия базы держится на одном тождестве $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и на умении прочитать четверть.

Карта темы

Пять станций зала.

- **Степени.** Устав из трёх правил плюс отрицательные показатели: они полноправные участники сложения и вычитания. Отдельный тренажёрный уголок — степени десятки: $9\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 3\cdot10 = 9530$ — это число, просто прочитанное по разрядам.
- **Стандартный вид.** $(a\cdot10^n)\cdot(b\cdot10^m)$: обычные числа перемножаем между собой, показатели десяток складываем. Две операции — и никакой паники от минуса в показателе.
- **Корни.** Таблица «вижу → делаю» висит на прежнем месте: произведение корней — под один корень; громоздкое число — выделить полный квадрат; скобки вида $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$ — разность квадратов, корни испаряются.
- **Логарифмы.** Для базы хватает определения и одного свойства: показатель степени выносится вперёд, $\log_3(7^8) = 8\cdot\log_3 7$. Увидели одинаковые логарифмы сверху и снизу — сокращайте, они для этого и стоят.

- **Тригонометрия.** Тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ плюс карта знаков: в первой четверти положительно всё, во второй — только синус, в третьей — только тангенс, в четвёртой — только косинус.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — степени. Найдите значение выражения $7^8 \cdot 7^{-3} / 7^3$.

Шаг 1. Умножение — показатели складываем: $8 + (-3) = 5$, получаем 7^5.

Шаг 2. Деление — вычитаем: $5 - 3 = 2$, остаётся 7^2.

Шаг 3. $7^2 = 49$. Семёрку в восьмой степени, как и в прошлом сезоне, не вычислял никто и никогда.

Ответ: 49.

Прототип 2 — стандартный вид. Найдите значение выражения $(4 \cdot 10^3) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-1})$.

Шаг 1. Числа между собой: $4 \cdot 2{,}1 = 8{,}4$.

Шаг 2. Десятки между собой: $10^3 \cdot 10^{-1} = 10^2$, показатели сложились: $3 + (-1) = 2$.

Шаг 3. Собираем: $8{,}4 \cdot 100 = 840$.

Ответ: 840.

Прототип 3 — логарифмы. Найдите значение выражения $\log_3(7^8) / (4 \cdot \log_3 7)$.

Шаг 1. Показатель выносится вперёд: $\log_3(7^8) = 8 \cdot \log_3 7$.

Шаг 2. Дробь: $(8 \cdot \log_3 7) / (4 \cdot \log_3 7)$. Одинаковые логарифмы сверху и снизу сокращаются — они здесь именно для этого.

Шаг 3. Остаётся $8 / 4 = 2$. Заметьте: чему равен сам $\log_3 7$, мы так и не узнали — и не нужно было.

Ответ: 2.

Прототип 4 — тригонометрия. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $90° < \alpha < 180°$.

Шаг 1. Основное тождество: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$.

Шаг 2. Корень: $\sin\alpha = 0{,}8$ или $\sin\alpha = -0{,}8$. Пока — два кандидата.

Шаг 3. Читаем четверть: $90° < \alpha < 180°$ — вторая четверть, синус там положителен. Выбираем 0,8.

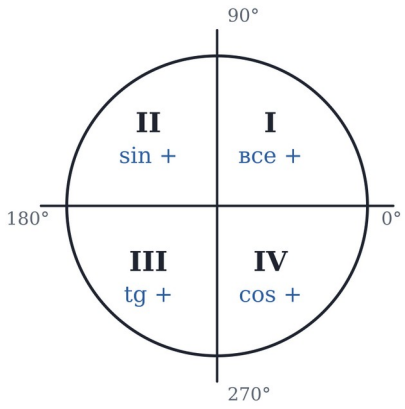


Рис. 1

Ответ: 0,8.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Вычислите: $3^{9} \cdot 3^{-5} / 3^{2}$.

2) Вычислите: $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$.

3) Вычислите: $(6 \cdot 10^{4}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-2})$.

4) Вычислите: $\log_2(5^{10}) / (5 \cdot \log_2 5)$.

5) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$.

Задание 17. Икс всё ещё ждёт

Тренажёр к заданию 17

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=equations

Что хотят. Решить уравнение. Линейные и квадратные — старые знакомые, показательные и логарифмические — новые лица в участке. Икс всё ещё ждёт, но теперь у него больше способов спрятаться — и ровно столько же способов быть найденным.

Классическая ловушка. Хвост условия. «Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них» — эта фраза стоит в конце и решает судьбу балла. Можно блестяще найти оба корня, вписать больший — и получить ноль. Хвост условия читается до решения, а не после: сначала узнайте, кого именно разыскивают.

Вредный совет. «Хвост условия — мелкий шрифт для юристов. Нашёл любой корень — пиши смело: математика важнее буквоедства».

А теперь серьёзно. Ритуал из трёх пунктов. Первый: прочитать условие целиком, включая хвост, — какой корень просят. Второй: решить своим конвейером, они перечислены ниже. Третий: подставить найденный корень обратно — двадцать секунд, и вы либо спокойны, либо только что спасли себе балл. Оба исхода по-прежнему выгодные.

Карта темы

Шесть конвейеров — по одному для каждого вида.

- **Линейные.** Раскрыть скобки, иксы налево, числа направо. Правило переезда прошлого сезона в силе: пересёк «=» — смени знак, таможня не дремлет.
- **Дробные уравнения-пропорции.** Вида $15/x = 3/4$: две дроби смотрят друг на друга через знак равенства — перемножаем крест-накрест: $3x = 15 \cdot 4 = 60$, откуда $x = 20$. Это тот же крестик из главы про проценты, только теперь в одной из клеток сидит икс. Финальный фейс-контроль: икс из знаменателя не имеет права обращать его в ноль.
- **Квадратные.** Полные — по конвейеру: выписал a, b, c → посчитал D → извлёк корень → нашёл оба x. Неполные вида $x^2 = 7x$ — выносим x за скобку: $x(x - 7) = 0$. Делить обе части на x нельзя: вместе с делением из задачи выходит корень $x = 0$, а его-то часто и спрашивают.
- **Иррациональные.** √(что-то) = число. Возводим обе части в квадрат — корень снимается, остаётся обычное уравнение. Подставьте каждый найденный корень в исходное уравнение: возведение в квадрат может добавить посторонние решения.

- **Показательные.** Привести обе части к одному основанию: 2, 4, 8, 16, 32 — это всё семья двойки в сборе. Основания одинаковые — значит, равны показатели, и дальше решается линейное.
- **Логарифмические.** Собрать по одному логарифму слева и справа — тогда равны аргументы. В конце фейс-контроль: под логарифмом должно остаться положительное число.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — линейное со скобками. Решите уравнение $7x - 4(2x - 3) = 15$.

Шаг 1. Раскрываем скобку, минус раздаётся каждому жильцу: $7x - 8x + 12 = 15$.

Шаг 2. Приводим иксы: $-x + 12 = 15$. Переезд через «=» со сменой знака: $-x = 3$.

Шаг 3. Делим на -1: $x = -3$.

Шаг 4. Проверка: $7\cdot(-3) - 4\cdot(-6 - 3) = -21 + 36 = 15$. Сошлось.

Ответ: −3.

Прототип 2 — неполное квадратное. Решите уравнение $x^2 = 7x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Шаг 1. Хвост прочитан: разыскивается меньший корень.

Шаг 2. Переносим и выносим x за скобку: $x^2 - 7x = 0$, то есть $x(x - 7) = 0$. Делить на x нельзя — ноль вышел бы из задачи через служебный выход.

Шаг 3. Произведение равно нулю, когда нулю равен один из множителей: $x = 0$ или $x = 7$.

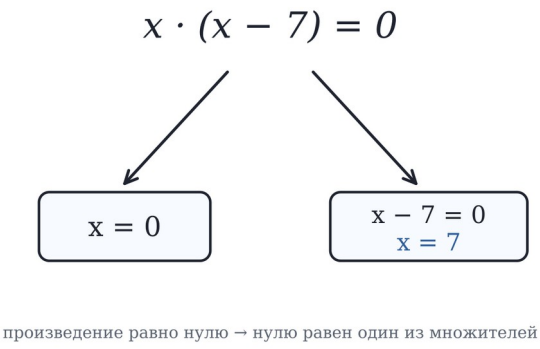


Рис. 1

Шаг 4. Меньший из корней — 0. Тот, кто разделил на x, получил только 7 — и потерял именно того, кого искали.

Ответ: 0.

Прототип 3 — показательное. Решите уравнение $2^{4x-7} = 32$.

Шаг 1. Приводим к одному основанию: $32 = 2^5$. Семья двойки в сборе: $2^{4x-7} = 2^5$.

Шаг 2. Основания равны — равны показатели: $4x - 7 = 5$.

Шаг 3. Линейный финал: $4x = 12$, $x = 3$. Проверка: $4 \cdot 3 - 7 = 5$, и $2^5 = 32$. Сошлось.

Ответ: 3.

Прототип 4 — логарифмическое. Решите уравнение $\log_5(x - 2) + \log_5 3 = \log_5 21$.

Шаг 1. Сумма логарифмов — логарифм произведения: $\log_5(3(x - 2)) = \log_5 21$.

Шаг 2. Основания и логарифмы совпали — равны аргументы: $3(x - 2) = 21$.

Шаг 3. Делим на 3: $x - 2 = 7$, значит, $x = 9$.

Шаг 4. Фейс-контроль: под логарифмом $x - 2 = 7$, число положительное — проходит.

Ответ: 9.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Решите уравнение $4x + 9 = x - 6$.

2) Решите уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$. Если корней несколько, в ответе укажите меньший.

3) Решите уравнение $\sqrt{(3x + 4)} = 5$.

4) Решите уравнение $3^{x+2} = 81$.

5) Решите уравнение $\log_2(5x - 4) = 4$.

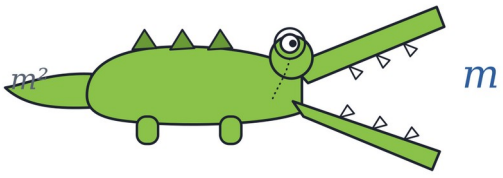
Задание 18. Крокодил подрос

Числа на координатной прямой

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=practice-number-match

Что хотят. Расставить числа по координатной прямой: сопоставить точки A, B, C, D с выражениями или числами вроде $\sqrt{13}$, $\log_3 7$ и $-2/m$. Крокодил прошлого сезона, который ел большего, подрос и сменил профессию: теперь он оценщик — прикидывает, кто где живёт на числовой прямой. Ответ — последовательность цифр, третье и последнее задание-соответствие в книге.

Классическая ловушка. Квадрат не всегда увеличивает. Если m лежит между нулём и единицей, то m^2 МЕНЬШЕ, чем m: половинка в квадрате — четвертинка. Кто верит в «квадрат всегда больше», ставит m^2 правее m и теряет балл. Второй разворот устраивает минус: он отражает всю прямую, и порядок чисел меняется на противоположный. Крокодил-оценщик[1], кстати, не ошибается: между нулём и единицей его пасть открыта к m, а не к m^2, — большее он чует без всяких прикидок.



пасть — всегда к большему

Вредный совет. «Не трать время на прикидки: расставь числа в том порядке, в каком они напечатаны, — составители наверняка так и задумали».

А теперь серьёзно. Одно оружие — грубая прикидка, каждой величине по одной строке. Корни зажимаем между соседними целыми: $3 < \sqrt{13} < 4$, потому что $9 < 13 < 16$. Логарифмы — между степенями основания: $\log_3 7$ живёт между 1 и 2, потому что $3^1 < 7 < 3^2$. Дроби делим уголком до первого знака после запятой. Начните с прикидки до десятых. Если два числа попали близко друг к другу, уточните сравнение: найдите ещё один знак или сравните точные выражения.

Карта темы

Числа и неравенства на числовой прямой.

- **Точки и выражения с m.** На прямой отмечено m — считываем его примерно (скажем, 0,7) и вычисляем все четыре выражения приближённо. Дальше каждое число само находит свою точку.

1 Настоящий крокодил-оценщик не бросается на добычу крупнее себя вслепую: сначала взвешивает риск, ведь крупная жертва способна и травмировать. Наш поступает так же — сравнивает, прежде чем разинуть пасть.

- **Точки и числа-константы.** $\sqrt{13}$, $\log_3 7$, 13/5, $(10/3)^{-1}$: прикидка каждой — и по местам. Обратная степень — это «перевернуть дробь».
- **Числа и отрезки.** То же самое, но адреса заданы отрезками [−2; −1], [0; 1]… Бонус: выражения вида m^2 при $m = \sqrt{5}$ считаются ТОЧНО — корень в квадрате испаряется, привет главе про качалку.
- **Неравенства и множества решений.** Проверьте знак произведения или дроби между нулями. Уберите точки, в которых знаменатель обращается в ноль. Для строгих неравенств границы, на которых получается равенство, также исключаются.
- **Два разворота.** Минус отражает порядок; квадрат чисел из (0; 1) уменьшает. Обе ловушки любят работать в паре.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — точки и выражения. Число m на рисунке расположено между 0 и 1. Вычислите приближённо 1) m^2; 2) m − 1,8; 3) 4,6 − m; 4) −3,2/m. Какой из этих результатов соответствует каждой из отмеченных точек A, B, C, D? Запишите номера результатов в порядке точек. (рис. 1)

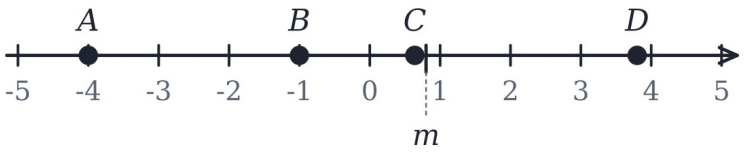


Рис. 1

Шаг 1. Считываем m с рисунка: между 0 и 1, ближе к единице — берём m ≈ 0,8.

Шаг 2. Прикидка всех четырёх: $m^2 \approx 0{,}64$, то есть немного левее m; m − 1,8 ≈ −1; 4,6 − m ≈ 3,8; −3,2/m ≈ −4.

Шаг 3. Раздаём адреса: −4 соответствует точке A (A—4); −1 — точке B (B—2); 0,64 — точке C (C—1); 3,8 — точке D (D—3).

Шаг 4. В порядке букв: 4, 2, 1, 3.

Ответ: 4213.

Прототип 2 — точки и константы. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Каждой точке соответствует одно из чисел: 1) $\sqrt{13}$; 2) $\log_3 7$; 3) 13/5; 4) $(10/3)^{-1}$. Установите соответствие. (рис. 2)

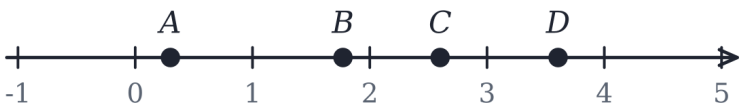


Рис. 2

Шаг 1. $\sqrt{13}$: между $\sqrt{9}$ и $\sqrt{16}$, то есть между 3 и 4, ближе к середине — около 3,6.

Шаг 2. $\log_3 7$: тройка в первой степени — 3, во второй — 9; семёрка между ними, значит, логарифм между 1 и 2.

Шаг 3. 13/5 = 2,6 — уголком за секунду. $(10/3)^{-1}$ — переворачиваем дробь: 3/10 = 0,3.

Шаг 4. По адресам: 0,3 — точка A (А—4); около 1,77 — точка B (В—2); 2,6 — точка C (С—3); около 3,61 — точка D (D—1).

Ответ: 4231.

Прототип 3 — числа и отрезки. Число m равно √5. Каждому числу из левого столбца соответствует отрезок из правого: А) $-\sqrt{m}$; Б) $m^2 - 2{,}8$; В) $-m/10$; Г) $2/m$. Отрезки: 1) [−2; −1]; 2) [−1; 0]; 3) [0; 1]; 4) [2; 3].

прикинул значение → нашёл его отрезок

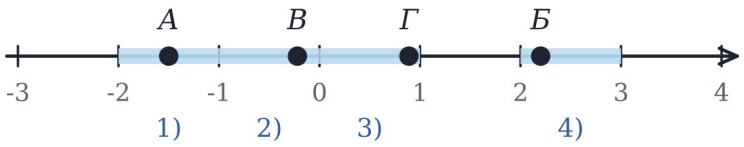


Рис. 3

Шаг 1. Прикидка базы: √5 ≈ 2,24, а $\sqrt{m} = \sqrt{(\sqrt{5})} \approx 1{,}5$.

Шаг 2. А) $-\sqrt{m} \approx -1{,}5$ — отрезок [−2; −1], А—1.

Шаг 3. Б) m^2 — точный ход: корень в квадрате испаряется, $m^2 = 5$. Тогда 5 − 2,8 = 2,2 — отрезок [2; 3], Б—4.

Шаг 4. В) $-m/10 \approx -0{,}22$ — отрезок [−1; 0], В—2. Г) $2/m \approx 0{,}89$ — отрезок [0; 1], Г—3.

Ответ: 1423.

Прототип 4 — неравенства и промежутки. Подберите множество решений для каждого неравенства.

А) $2x + 4 > 0$; Б) $3^{x-1} < 9$; В) $(x + 2)(x - 3) < 0$; Г) $1/((x + 2)(x - 3)) > 0$.

1) (−2; 3); 2) (−∞; −2) ∪ (3; +∞); 3) (−2; +∞); 4) (−∞; 3).

Шаг 1. А) Вычитаем 4 и делим на 2: $x > -2$. Получаем А—3. Б) У степеней с основанием 3 сравниваем показатели: $x - 1 < 2$, то есть $x < 3$. Получаем Б—4.

Шаг 2. В) Произведение отрицательно, когда множители разных знаков. Это верно строго между нулями −2 и 3. Получаем В—1.

Шаг 3. Г) Дробь положительна, когда знаменатель положителен. По обе стороны от отрезка [−2; 3] множители одного знака. В точках −2 и 3 дробь не определена. Получаем Г—2.

Ответ: 3412.

Сопоставить неравенства и промежутки в тренажёре

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Между какими соседними целыми числами лежит $\sqrt{29}$? В ответе укажите большее из них.

2) Между какими соседними целыми числами лежит $\log_2 20$? В ответе укажите меньшее из них.

3) Число m равно 0,6. Какое из трёх чисел наименьшее? Укажите номер ответа: 1) m^2; 2) m; 3) $1/m$.

4) Сопоставьте неравенства и множества их решений. Запишите цифры в порядке букв.

А) $5x + 15 \geq 0$; Б) $2^{x+1} > 8$; В) $(x + 3)(x - 2) \leq 0$; Г) $1/((x + 3)(x - 2)) < 0$.

1) $(2; +\infty)$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $(-3; 2)$; 4) $[-3; 2]$.

Часть четвёртая. Последние три: задачи с характером

Задание 19. Цифровой детектив

Тренажёр к заданию 19

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=integers

Что хотят. Найти число по словесному портрету: трёхзначное, кратное 12, сумма цифр 21, особых примет нет. Часто подходящих чисел несколько, и условие честно говорит: «в ответе укажите какое-нибудь одно». Это задание-конструктор: число не ищут — его собирают.

Классическая ловушка. Проверять делимость на 4 суммой цифр. Сумма цифр отвечает только за тройку и девятку. Двойка, четвёрка, пятёрка и их родня смотрят на ХВОСТ числа: последнюю цифру или две последние. Кто путает ведомства — собирает число, которое не проходит проверку.

Вредный совет. «Перебирай все трёхзначные числа подряд, начиная со 100. К вечеру обязательно повезёт».

А теперь серьёзно. Досье признаков — на стол. На 2 — чётный хвост; на 5 — хвост 0 или 5; на 4 — две последние цифры делятся на 4; на 3 и на 9 — сумма цифр; на 10 — ноль в хвосте. Если множители взаимно просты, делимость на их произведение равносильна делимости на оба множителя. Например, для делимости на 45 проверьте отдельно делимость на 9 и на 5. Стратегия конструктора: сначала обеспечьте хвост, потом добейте сумму передними цифрами. И читайте формат: «укажите какое-нибудь одно» — нашли первое подходящее, записали, ушли; конкурс красоты не объявляли.

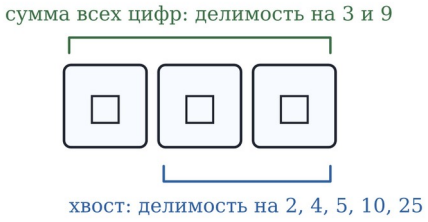


Рис. 1

Карта темы

Пять папок детективного дела.

- **Сборка по признакам.** Кратность плюс условие на цифры: наибольшее без такой-то цифры, с заданной суммой. Хвост решает кратность, перед решает сумму.
- **Деление с остатком.** «При делении и на 3, и на 4 даёт остаток 1» — значит, число на 1 больше кратного НОК: шагайте по ряду 12k + 1 и фильтруйте по цифрам.

- **Вычёркивание цифр.** Посчитать сумму всех цифр, понять, какая сумма должна остаться, подобрать жертв. Порядок оставшихся цифр не меняется.
- **Число из заданных цифр.** Только двойки и нули, только две различные цифры: та же сборка, но с ограниченным набором деталей. При заданном произведении цифр сначала подберите множители, а потом проверьте их порядок.
- **Два числа.** Переставьте цифры первого числа и проверьте, из нужных ли цифр состоит результат умножения.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — сборка с запретом. Найдите наибольшее трёхзначное число, кратное 4, в записи которого нет цифры 9.

Шаг 1. Наибольшее — значит, идём сверху. Числа от 900 до 999 начинаются с девятки, поэтому отпадают.

Шаг 2. Среди кратных четырём меньше 900 начнём с 896 и 892. Оба числа содержат девятку, следующий кандидат — 888.

Шаг 3. Проверка хвостом: 88 делится на 4 ($88 = 4 \cdot 22$), девяток нет. Три восьмёрки проходят фейс-контроль.

Ответ: 888.

Прототип 2 — деление с остатком. Найдите трёхзначное число, которое при делении и на 3, и на 4 даёт остаток 1 и все цифры которого нечётные. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Шаг 1. Остаток 1 и там и там — значит, число на единицу больше общего кратного: НОК(3, 4) = 12, ищем среди чисел вида $12k + 1$.

Шаг 2. Шагаем по ряду в трёхзначной зоне: 109, 121, 133…

Шаг 3. Фильтр цифр: у 109 есть ноль, у 121 — двойка, а 133 — единица и две тройки, все нечётные.

Шаг 4. Проверка: $133 = 12 \cdot 11 + 1$, остатки при делении на 3 и на 4 равны 1. Детектив закрыл дело.

Ответ: 133 (подойдёт и 157, и 193 — «какое-нибудь одно»).

Прототип 3 — число из двух цифр. На табло работают только клавиши 0 и 3. Наберите шестизначный код, который представляет собой число, кратное 45. Первая цифра не может быть нулём. Запишите любой подходящий код.

Шаг 1. Раскладываем заказ: $45 = 9 \cdot 5$ — нужна делимость и на 9, и на 5.

Шаг 2. На 5 отвечает хвост: из доступных цифр подходит только 0 в конце.

Шаг 3. На 9 отвечает сумма: каждая тройка даёт 3, значит, троек должно быть три или шесть. Шестизначное число начинается не с нуля — ставим тройку вперёд.

Шаг 4. Собираем: 333 000. Проверка: сумма цифр 9, хвост 0, и 333 000 / 45 = 7400.

Ответ: 333000.

Прототип 4 — кратность плюс сумма. Найдите трёхзначное число, кратное 12, сумма цифр которого равна 21. В ответе укажите какое-нибудь одно такое число.

Шаг 1. Раскладываем: 12 = 3 · 4. Сумма 21 делится на 3 — тройка обслужена бесплатно, остаётся четвёрка.

Шаг 2. Четвёрке нужен хвост из двух цифр, кратный 4. Перебираем кандидатов с суммой 21: у 588 хвост 88 = 4 · 22 — подходит.

Шаг 3. Проверка: 5 + 8 + 8 = 21 и 588 / 12 = 49. Дело закрыто.

Ответ: 588 (годятся и 696, и 984).

Прототип 5 — два набора цифр. На первой табличке записано трёхзначное число из цифр 1, 3 и 6, на второй — из цифр 4, 8 и 9. Каждая из указанных цифр использована ровно один раз. Число на второй табличке втрое больше первого. Запишите одно подходящее число с первой таблички.

Шаг 1. Второе число не больше 984, поэтому первое не больше 328. Из шести перестановок остаются 136, 163 и 316.

Шаг 2. Умножаем на 3: 408, 489 и 948. Два последних результата составлены из нужных трёх цифр, поэтому любой из соответствующих вариантов подходит.

Ответ: 163 или 316.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Найдите наибольшее трёхзначное число, кратное 5, в записи которого нет цифры 5.

2) Найдите трёхзначное число, которое при делении и на 5, и на 6 даёт остаток 3. Укажите какое-нибудь одно.

3) Вычеркните в числе 63251 две цифры так, чтобы получившееся трёхзначное число делилось на 9. Запишите одно такое число.

4) Найдите пятизначное число, записанное только цифрами 2 и 0, которое делится на 12. Укажите какое-нибудь одно.

5) Из числа 470526 вычеркните две цифры, сохранив порядок оставшихся. Запишите одно получившееся четырёхзначное число, кратное 18.

6) Электронный замок принимает четырёхзначный код: все цифры ненулевые и различные, их произведение равно 192. Последние две цифры образуют число, кратное 8. Запишите один подходящий код.

Задание 20. Движение, работа и другие приключения

Тренажёр к заданию 20

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=motion

Что хотят. Решить текстовую задачу с сюжетом: автомобиль меняет скорость, теплоход спорит с течением, два мастера делят один заказ. Формулы — три штуки на всю главу; главная работа — перевести рассказ на язык величин и не поддаться интуиции, которая здесь ошибается с особым удовольствием.

Классическая ловушка. Средняя скорость — это НЕ среднее скоростей. Два часа по 90 км/ч и три часа по 60 — интуиция шепчет «(90 + 60) / 2 = 75». Средняя скорость считается только одним способом: весь путь разделить на всё время — и получается 72. Чем дольше едешь медленно, тем сильнее медленный участок тянет среднюю вниз; арифметическое среднее этого не чувствует.

Вредный совет. «Средняя скорость — это когда складываешь скорости и делишь на два. На то она и средняя».

А теперь серьёзно. Три кита главы: $S = v \cdot t$ для движения, $A = p \cdot t$ для работы (p — производительность, доля дела в час) и правило воды: по течению скорости складываются, против — вычитаются. Плюс фирменный приём — метод удобного числа: если путь или объём работы не даны, назначьте их сами, взяв число, кратное всем участникам. Дроби исчезают, остаётся арифметика. А прямые пропорции — «столько-то деталей за столько-то часов» — по-прежнему обслуживает крестик из главы про проценты.

Карта темы

Пять сюжетных линий.

- **Средняя скорость по времени.** Куски пути заданы часами: путь каждого куска — $v \cdot t$, дальше весь путь на всё время.
- **Средняя скорость по кускам пути.** «Первую половину — 40, вторую — 60»: путь не дан — назначаем удобный (кратный обеим скоростям), считаем времена, делим.
- **Движение по воде.** Собственная скорость плюс-минус течение; в сложных рейсах туда-обратно путь один и тот же — это и есть уравнение.
- **Совместная работа.** Складываются производительности, а не времена; вместе всегда быстрее самого быстрого одиночки. Метод удобного числа превращает дроби в целые детали.
- **Прямые пропорции.** Производительность постоянна — работа растёт вместе со временем: табличка 2×2, крестик, готово.

- **Встреча после разворота.** Отметьте место разворота и место встречи. На обратном участке считайте только тот путь, который участник успел пройти до встречи.
- **Разбавление.** Вода меняет общую массу раствора. Масса растворённого вещества сохраняется.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — средняя скорость по времени. Первые два часа автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, следующие три часа — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость на протяжении всего пути.

Шаг 1. Путь по кускам: 90 · 2 = 180 и 60 · 3 = 180. Весь путь: 360 км.

Шаг 2. Всё время: 2 + 3 = 5 часов.

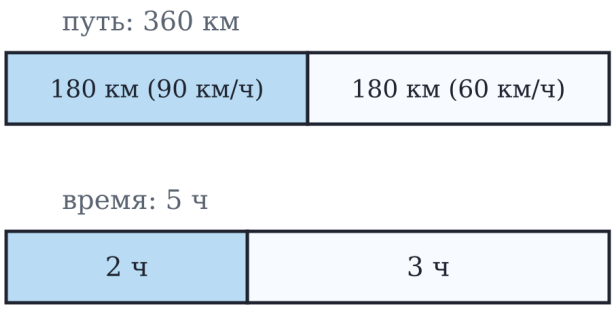


Рис. 1

Шаг 3. Средняя: 360 / 5 = 72. Не 75 — медленный кусок длился дольше и перетянул.

Ответ: 72.

Прототип 2 — средняя скорость по кускам пути. Первую половину пути автомобиль ехал со скоростью 40 км/ч, вторую — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость.

Шаг 1. Путь не дан — назначаем удобный: пусть половина равна 120 км (делится и на 40, и на 60). Весь путь: 240 км.

Шаг 2. Времена: 120 / 40 = 3 часа и 120 / 60 = 2 часа. Всего 5 часов.

Шаг 3. Средняя: 240 / 5 = 48. Заметьте: не 50 — и ответ не зависит от того, какой путь мы назначили: возьмите половину в 600 км и получите те же 48.

Ответ: 48.

Прототип 3 — совместная работа. Один мастер выполняет заказ за 12 часов, другой — за 24 часа. За сколько часов они выполнят заказ, работая вместе?

Шаг 1. Метод удобного числа: пусть заказ — 24 детали (кратно 12 и 24).

Шаг 2. Производительности: первый — 24 / 12 = 2 детали в час, второй — 24 / 24 = 1 деталь в час. Вместе — 3 детали в час.

Шаг 3. Время: 24 / 3 = 8 часов. Контроль здравого смысла: 8 меньше 12 — вместе быстрее самого быстрого. Кто получил 18 или 36 — складывал времена, а они не складываются.

Ответ: 8.

Прототип 4 — движение по воде. Собственная скорость теплохода равна 21 км/ч, скорость течения — 3 км/ч. Сколько часов займёт путь в 96 км по течению?

Шаг 1. По течению скорости складываются: 21 + 3 = 24 км/ч.

Шаг 2. Время: t = S / v = 96 / 24 = 4.

Ответ: 4.

Прототип 5 — встреча после разворота. Бегун и велосипедист одновременно отправились из парка по дороге к мосту, расположенному в 20 км от парка. Бегун всё время движется со скоростью 6 км/ч. Велосипедист доехал до моста и без остановки поехал обратно по той же дороге с прежней скоростью. После разворота он встретил бегуна в 8 км от парка. Найдите скорость велосипедиста в км/ч.

Шаг 1. Время до встречи одинаковое: бегун прошёл 8 км за 8 : 6 = 4/3 часа.

Шаг 2. Велосипедист проехал 20 км до моста и ещё 20 − 8 = 12 км на обратном пути. Весь его путь равен 32 км.

Шаг 3. Делим путь на время: 32 : (4/3) = 24 км/ч.

Ответ: 24.

Прототип 6 — разбавление. Есть 400 г 12-процентного солевого раствора. Сколько граммов воды надо добавить, чтобы получить 8-процентный раствор?

Шаг 1. В исходных 400 г раствора содержится 400 · 0,12 = 48 г соли. При добавлении воды масса соли не изменится.

Шаг 2. Те же 48 г должны составлять 8% от новой массы: 48 : 0,08 = 600 г.

Шаг 3. Добавили 600 − 400 = 200 г воды.

Ответ: 200.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) Два часа автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, затем три часа — со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость.

2) Первую половину пути автомобилист ехал со скоростью 30 км/ч, вторую — со скоростью 70 км/ч. Найдите среднюю скорость.

3) Один насос наполняет бак за 20 минут, другой — за 30 минут. За сколько минут они наполнят бак, работая вместе?

4) Станок делает 90 деталей за 2 часа. Сколько деталей он сделает за 5 часов при той же производительности?

5) Собственная скорость катера — 16 км/ч, скорость течения — 2 км/ч. Сколько часов займёт путь в 70 км против течения?

6) Первый час велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч, следующие два часа со скоростью 18 км/ч, последний час со скоростью 24 км/ч. Найдите среднюю скорость за всю поездку в километрах в час.

7) К 350 г 18-процентного раствора вещества долили воду. Массовая доля вещества стала 14%. Сколько граммов воды долили?

Задание 21. Смекалка против шаблона

Тренажёр к заданию 21

mathexam.space/ege-baza/path/index.html#lesson=reasoning

Что хотят. Решить задачу, к которой не приложена формула: распиленные доски, кузнечик на прямой, задуманное число, колодец с дорожающими метрами. В последнем задании помогает рисунок, маленький пример или поиск величины, которая не меняется.

Классическая ловушка. Распил не делит мир пополам. Тринадцать распилов — это не тринадцать кусков: каждый распил одного куска добавляет ровно один кусок к тому, что было. Одна доска и три распила — четыре куска; пять досок и тринадцать распилов — восемнадцать. Кто забывает про стартовые доски и про «плюс один», отдаёт самый честный балл варианта.

Вредный совет. «Нестандартная задача — это стандартная, к которой ещё не подобрали формулу. Подбирай формулы, пока какая-нибудь не подойдёт».

А теперь серьёзно. Три привычки решают главу. Первая: разыграть маленький случай — две доски, три распила, посчитать пальцами и увидеть закон. Вторая: искать инвариант — величину, которая сохраняется. Например, число кусков минус число распилов остаётся равным числу целых досок в начале. Третья: проверить ответ обратной подстановкой в сюжет — нестандартные задачи проверяются подстановкой лучше любых других. И бонус: прогрессии, жившие в ОГЭ отдельным заданием, переехали сюда — их сумма считается методом Гаусса на пальцах: среднее первого и последнего членов умножают на их количество.

Карта темы

Приёмы для последнего задания.

- **Распилы и куски.** Если каждым распилом делят один кусок, итоговое число кусков равно числу исходных досок плюс число распилов. Палка с линиями трёх цветов: сосчитать линии каждого цвета (куски минус один), сложить, прибавить один.
- **Чётность и инварианты.** Фишка за ход перемещается на соседнюю клетку. Чётность номера клетки меняется на каждом ходу. Чётность разности «номер клетки минус количество ходов» сохраняется.
- **Обратный ход и перебор по остаткам.** «Задумали число, умножили, прибавили, вычли» — раскручиваем с конца, отсекая варианты делимостью.
- **Прогрессии в быту.** Каждый метр колодца дороже предыдущего на одно и то же — это арифметическая прогрессия: сумма равна среднему арифметическому первого и последнего членов, умноженному на число членов.

- **Кратчайшие дуги.** Отметьте порядок точек на круге. Проверьте, совпадает ли одно кратчайшее расстояние с суммой двух других: это происходит, когда путь между крайними точками проходит через третью.
- **Здравый подсчёт.** Провода между столбами, клетки, части глобуса: аккуратный пересчёт без формул, с рисунком на полях.
- **Равные вклады.** Запишите, как начисляются баллы за каждый ответ, или сложите суммы строк и столбцов. Разницу периметров в двух рядах прямоугольников можно найти по разнице их ширин.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — доски и распилы. Взяли несколько досок. Сделали 16 поперечных распилов, каждый раз разрезая только один кусок, и получили 22 куска. Сколько досок взяли?

Шаг 1. Инвариант: каждый распил добавляет ровно один кусок.

Шаг 2. Значит, кусков = досок + распилов.

Шаг 3. Досок: 22 − 16 = 6. Проверка на маленьком случае: одна доска, один распил — два куска; формула согласна.

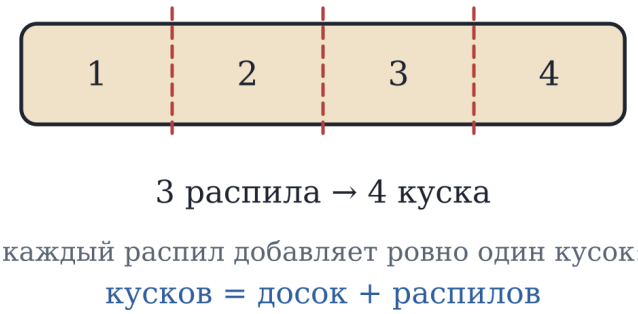


Рис. 1

Ответ: 6.

Прототип 2 — колодец. За первый метр колодца хозяин платит 4000 рублей, а за каждый следующий — на 1500 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько рублей он заплатит за колодец глубиной 8 метров?

Шаг 1. Платежи — арифметическая прогрессия. Последний, восьмой метр: 4000 + 7 · 1500 = 14 500.

Шаг 2. Метод Гаусса на пальцах: средний платёж — это среднее первого и последнего: (4000 + 14 500) / 2 = 9250.

Шаг 3. Всего: 9250 · 8 = 74 000.

Ответ: 74000.

Прототип 3 — задуманное число. Задумали натуральное число, умножили его на A, к произведению прибавили B и вычли C — получилось 171. Известно, что A, B и C — натуральные числа, каждое больше 4, но меньше 8. Какое число было задумано?

Шаг 1. Переводим: n·A + B − C = 171, где A, B, C — из набора 5, 6, 7.

Шаг 2. Разность B − C лежит между −2 и 2, значит, произведение n·A — между 169 и 173.

Шаг 3. Перебор по остаткам: кратных 6 в этом окне нет (168 и 174 — мимо), кратных 7 тоже нет (168 и 175 — мимо). Кратное 5 одно: 170.

Шаг 4. Значит, A = 5 и n = 34, а B − C = 1 (например, B = 6, C = 5). Проверка: 34 · 5 + 6 − 5 = 171. Сошлось.

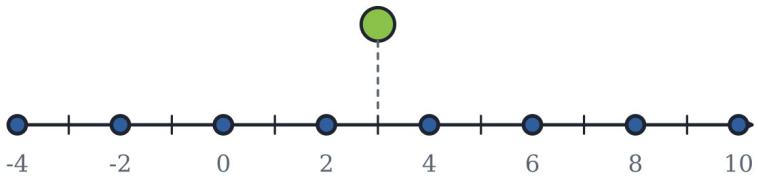
Ответ: 34.

Прототип 4 — фишка в ряду клеток. Клетки пронумерованы целыми числами. Сначала фишка стоит в клетке 3. За ход её переставляют в соседнюю клетку слева или справа. Сколько разных номеров может быть у её клетки после семи ходов?

Шаг 1. С каждым ходом чётность номера меняется. Стартовый номер 3 нечётный, а после семи ходов номер будет чётным.

Шаг 2. Границы: левый край 3 − 7 = −4, правый край 3 + 7 = 10.

Шаг 3. Изменим одно направление хода с левого на правое. Конечная клетка сдвигается на два номера вправо. Получаем восемь чётных номеров от −4 до 10.



7 ходов из клетки 3: достижимы чётные номера от −4 до 10 их ровно 8

Рис. 2

Ответ: 8.

Прототип 5 — ответы и пропуски. В отборе 21 задание. За верный ответ дают 6 баллов, за неверный снимают 7 баллов, пропуск приносит 0. Участник набрал 31 балл. Сколько заданий он выполнил верно?

Шаг 1. Обозначим количество верных ответов буквой c, а количество неверных — буквой w. Тогда 6c − 7w = 31. Чтобы набрать 31 балл, верных ответов должно быть хотя бы шесть.

Шаг 2. Число 6c − 31 должно делиться на 7. При c = 11 получаем 66 − 31 = 35. Остальные подходящие значения отличаются от 11 на число, кратное семи: 6 и 7 взаимно просты. От 6 до 21 остаются только 11 и 18.

Шаг 3. При 11 верных ответах неверных 35 : 7 = 5. Всего отвечено 16 заданий, ещё пять пропущены. При 18 верных ответах неверных (108 − 31) : 7 = 11, всего 29 ответов. В отборе только 21 задание, поэтому второй вариант отпадает.

Ответ: 11.

Прототип 6 — четыре прямоугольника. Лист разрезали вдоль и поперёк на четыре прямоугольника. Периметр верхнего левого прямоугольника равен 26 см, верхнего правого — 34 см, нижнего правого — 22 см. Найдите периметр нижнего левого прямоугольника в сантиметрах.



Рис. 3

Шаг 1. В верхнем ряду прямоугольники имеют одинаковую высоту. Поэтому увеличение периметра на 34 − 26 = 8 см объясняется только разницей ширин.

Шаг 2. В нижнем ряду ширины те же. Разница периметров между правой и левой частью снова 8 см. Получаем 22 − 8 = 14 см.

Ответ: 14.

Проверь себя

Ответы — в конце книги, в главе «Ответы». Сначала решите, потом подглядывайте: в тренажёре подсмотренный ответ не идёт в счёт, тут — на вашей совести.

1) На деревянную рейку нанесли три схемы раскроя. Первая схема даёт 6 деталей, вторая 9, третья 5. Места разрезов у трёх схем разные. Сколько деталей получится, если выполнить каждый отмеченный разрез?

2) Сделали 12 поперечных распилов нескольких досок и получили 17 кусков. При каждом распиле разрезали только один кусок. Сколько было досок?

3) Фишка из разбора начинает в клетке 3. Сколько разных конечных клеток возможно за пять ходов?

4) За первый метр колодца платят 3000 рублей, за каждый следующий — на 1000 больше. Сколько рублей стоит колодец глубиной 6 метров?

5) На круговой дорожке стоят отметки A, B и C именно в таком порядке при движении по часовой стрелке. Кратчайшие расстояния по дорожке между A и B, B и C, C и A равны соответственно 140, 190 и 230 м. Какова длина круговой дорожки в метрах?

6) В ведомости три столбца с положительными целыми числами. Суммы чисел по столбцам равны 45, 47 и 51. Сумма в каждой строке равна 14 или 15. Сколько строк в ведомости?

Ответы к рубрике «Проверь себя»

Сверяйтесь после решения. Ответ, подсмотренный заранее, — как прогноз погоды на вчера: формально верен, пользы никакой. Ответы разминки живут прямо в разминке — туда за ними и возвращайтесь.

Задание 1. 1) 7 2) 13 3) 225 (обед стоит 275) 4) 8 (144 : 18, здесь делится нацело)

Задание 2. 1) 2314 2) 2134

Задание 3. 1) 5000 (превышение 90 — строка «81 и более») 2) 4 (среда, четверг, пятница, суббота; воскресные 18° — не выше 18°) 3) 3

Задание 4. 1) 2000 2) 75 3) 100 (вода закипела и по Фаренгейту) 4) 11

Задание 5. 1) 0,15 2) 0,75 (три части чёрного из четырёх) 3) 0,96 4) 0,5 (болгарок ровно половина: 40 − 8 − 12 = 20)

Задание 6. 1) 414 2) 520 (единый билет против 580 по отдельности) 3) 6 4) 2080 (40 литров по 52 рубля против 2560 за поезд)

Задание 7. 1) 2024 2) 3 (2019, 2020 и 2021) 3) 4 4) 3241

Задание 8. 1) 24 2) 124

Задание 9. 1) 26 2) 9 3) 900 (те же 9 клеток, но клетка теперь стоит 100 м²) 4) 40 (радиус втрое — площадь вдевятеро: 45 − 5) 5) 88

Задание 10. 1) 6 (тройка 5–12–13, уменьшенная вдвое) 2) 56 3) 36 4) 719 ($32 \cdot 24 - 7^2$) 5) 21

Задание 11. 1) 6 2) 2 (четвёрка от квадрата ширины делится на двойку от высоты) 3) 4500 (пять граней по 900) 4) 819 (в мерке уже $875 \cdot (8/20)^3 = 56$ мл) 5) 4,2

Задание 12. 1) 70 2) 29 (тройка 20–21–29) 3) 13 (половинки диагоналей 5 и 12) 4) 120 5) 74 6) 60

Задание 13. 1) 70 2) 9 3) 1 (объёмы равны — сюрприз для внимательных) 4) 9 (поверхности — квадраты, не кубы) 5) 7 6) 108

Задание 14. 1) 1,5 2) −4 (минус — законный жилец бланка) 3) 1,75 4) 11 5) а) 24 — большее делится на меньшее; б) 70 — взаимно простые; в) 30 — перебор кратных

Задание 15. 1) 270 2) 2700 3) 120 4) 4

Задание 16. 1) 9 2) 21 (под корнем 441) 3) 900 4) 2 5) −0,6 (вторая четверть: косинус отрицателен)

Задание 17. 1) −5 2) −3 3) 7 4) 2 5) 4 (под логарифмом $2^4 = 16$)

Задание 18. 1) 6 ($25 < 29 < 36$) 2) 4 ($16 < 20 < 32$) 3) 1 ($m^2 = 0{,}36$) 4) 2143

Задание 19. 1) 990 2) любое трёхзначное число вида 30k + 3, например 123 3) 621 или 351 4) 20220, 22020 или 22200 5) 4752 или 7056 6) например 1648: $1 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8 = 192$, а 48 делится на 8

Задание 20. 1) 62 2) 42 (весь путь на всё время, а не среднее скоростей) 3) 12 4) 225 (крестик: $90 \cdot 5 / 2$) 5) 5 6) 18 7) 100

Задание 21. 1) 18 (5 + 8 + 4 разреза дают 18 деталей) 2) 5 3) 6 4) 33000 (средний платёж 5500 на шесть метров) 5) 560 (ни одно из трёх кратчайших расстояний не равно сумме двух других, значит, это длины трёх соседних дуг) 6) 10 (общая сумма 143, девять строк дают не более 135, одиннадцать — не менее 154)

Словарик паникующего одиннадцатиклассника

Каждый термин — в двух переводах: сначала как его понимает народ, потом как он есть на самом деле.

Логарифм

Слово, от которого выпускники переходят на другую сторону улицы. Зря: он всего лишь спрашивает «в какую степень?»

На самом деле: показатель степени, в которую нужно возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_2 8 = 3$, потому что $2^3 = 8$.

Синус и косинус

Два брата из справочных материалов: один отвечает за противолежащее, другой за прилежащее, и оба не выходят за рамки от -1 до 1.

На самом деле: для острого угла прямоугольного треугольника синус — отношение противолежащего катета к гипотенузе, косинус — прилежащего к гипотенузе.

Тангенс

Семейный конфликт синуса и косинуса, оформленный дробью.

На самом деле: отношение синуса к косинусу; в прямоугольном треугольнике — противолежащего катета к прилежащему.

Стандартный вид числа

Способ записать миллиард так, чтобы он поместился в строчку и не пугал.

На самом деле: запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$.

Средняя скорость

Не то, что вы подумали. Серьёзно: не то.

На самом деле: весь путь, делённый на всё время движения. Средним арифметическим скоростей не является почти никогда.

Инвариант

То, что не меняется, пока всё вокруг меняется. В жизни встречается редко, в задании 21 — постоянно.

На самом деле: величина, сохраняющаяся при заданных преобразованиях: число кусков минус число распилов, чётность позиции кузнечика.

Крестик 2×2

Фирменная табличка этой книги: четыре клетки, которые заменяют половину курса алгебры.

На самом деле: запись пропорции таблицей из двух строк; неизвестное равно произведению чисел на диагонали без икса, делённому на третье число.

Этажерка

Дробь, у которой внутри ещё дробь. Выглядит страшно, разбирается поэтажно.

На самом деле: многоэтажная дробь; вычисляется отдельно по числителю и знаменателю, затем дробная черта читается как деление.

Хвост условия

Мелкий шрифт, который решает судьбу балла: «в ответе укажите меньший из корней».

На самом деле: заключительная часть формулировки, определяющая, что именно записывать в бланк. Читается до решения.

Тройки Пифагора

Дежурная бригада 3–4–5 со всей роднёй: приезжают на вызов раньше, чем вы успели возвести в квадрат.

На самом деле: тройки целых чисел, для которых $a^2 + b^2 = c^2$: 3–4–5, 6–8–10, 5–12–13, 8–15–17.

Справочные материалы

Официальная шпаргалка, которую выдают вместе с работой. Единственная шпаргалка, за которую не удаляют.

На самом деле: лист с формулами, входящий в комплект КИМ базового ЕГЭ.

Первичный балл

Валюта экзамена: одна задача — одна монета, курс к отметке устанавливается ежегодно.

На самом деле: балл за верно выполненное задание; на базе их максимум 21, и они переводятся в отметку по пятибалльной шкале.

Вредные советы бывалого двоечника

Читать с осторожностью. Применять строго наоборот.

Совет № 1. *Не читай хвост условия — концовки всегда предсказуемы.*

Перевод на полезный: хвост решает, какой из корней записывать и в каких единицах отвечать. Читается до решения — это самые дешёвые десять секунд экзамена.

Совет № 2. *На базу готовиться не нужно: это же база. Приди и реши.*

Перевод на полезный: 21 задание за 180 минут — это про темп и наигранность. Каждый знакомый тип — минус один сюрприз в аудитории; тренажёр существует ровно для этого.

Совет № 3. *Пиши ответ красиво: «25%», «3 часа», «5/7». Пусть проверяющие видят культурного человека.*

Перевод на полезный: в бланк пишем число без единиц. Если спрашивают, сколько процентов, записываем 25. Если нужна вероятность в долях единицы, записываем 0,25. Для трёх часов пишем 3. В заданиях с соответствием или выбором вариантов записываем последовательность цифр.

Совет № 4. *Переноси всё в бланк в последние пять минут — так драматичнее.*

Перевод на полезный: переносите блоками по ходу работы и сверяйте номера задач. Черновик не проверяется: гениальное решение, оставшееся в нём, стоит ноль баллов.

Совет № 5. *Задания-соответствия пропускай: цифры там всё равно случайные.*

Перевод на полезный: соответствия (2, 7 и 18) — самые щедрые задания варианта: метод крайностей и метод уникальных характеристик решают их почти без вычислений.

Совет № 6. *Начинай с заданий 19–21: сначала интеллектуальный десерт, остальное — по остаточному принципу.*

Перевод на полезный: сначала соберите гарантированные баллы первой половины варианта. «Последние три» никуда не денутся — у них контракт до конца экзамена.

Совет № 7. *Проверять ответы — признак неуверенности. Первая мысль всегда от души.*

Перевод на полезный: подстановка ответа обратно в условие занимает полминуты и оплачивается баллами. Душа переживёт, аттестат — не факт.

Бинго подготовки к ЕГЭ

Возьмите карандаш и отмечайте клетки, которые с вами уже случались. Линия по горизонтали, вертикали или диагонали — официальное звание настоящего выпускника. Честность приветствуется: это бинго, а не отчёт.

Сказал: «база — это изи»	Перевёл 1/3 в 0,33	Посчитал среднее скоростей	Потерял ноль, поделив на икс
Прочитал хвост условия после решения	Сложил проценты 20 и 25	Забыл, что клетка 10×10 — это сто	Записал 5/7 и сам всё понял
Сложил времена двух работников	Округлил автобусы вниз	Поставил m^2 правее m	Забыл минус во второй четверти
Купил всё самое дешёвое — переплатил	Вычислил 5^{14} столбиком	Забыл про второй набор полотенец	Победил этажерку с первого раза

Собрали линию? Звание присвоено. Теперь — в тренажёр: звание надо оправдывать.

Оракул на случай паники

Инструкция: почувствовали, что логарифм сильнее вас, — загадайте число от 1 до 12 и прочтите свой пункт. Оракул работает без батареек и не ошибается, потому что все ответы верные.

- Все формулы уже напечатаны и ждут тебя на столе. Осталось прийти.
- Ты отличаешь треть от 0,33. Составители уже нервничают.
- Крестик 2×2 выдерживает любую пропорцию. И тебя выдержит.
- Хвост условия будет прочитан — а это уже верхняя половина рейтинга.
- Куб подобия на твоей стороне: маленькие ежедневные усилия дают большой объём.
- Минус — законный житель бланка. И ты в этой аудитории — тоже законно.
- Дежурная тройка 3–4–5 выезжает по первому вызову. Проверено веками.
- Каждый освоенный тип — минус один незнакомец на экзамене.
- Средняя скорость подготовки считается по всему пути. Один медленный день ничего не решает.
- Этажерка разбирается поэтажно. Как и любая большая задача.
- У кузнечика после любого числа прыжков есть куда встать. У тебя тем более.
- Икс всё ещё ждёт. Дождётся — и найдётся.

Математический гороскоп

Астрология не сдала ЕГЭ даже на базовом уровне, но предсказание получить можно. Загадайте число от 1 до 10. Точность — как у прогноза погоды, зато математика внутри настоящая.

- Звёзды выстроились в тройку 3–4–5: день будет прямоугольным и честным.
- Ретроградная запятая: при делении десятичных сдвигай её у обоих чисел, и всё наладится.
- Луна в фазе половины высоты конуса: сегодня достаточно восьмушки усилий.
- Меркурий перешёл в стандартный вид: будь собой, умноженным на 10 в нужной степени.
- Венера напоминает: во второй четверти синус положителен. Как и твои шансы.
- Сатурн передаёт кольцом: заштрихованная фигура — это разность площадей. Всё лишнее — вычесть.
- Юпитер советует округлять вверх: людям нужен седьмой автобус.
- День благоприятен для сокращения дробей и дистанции до экзамена.
- Знак сегодня один — знак равенства: к вечеру всё сойдётся.
- Прогноз: утром — прототип, днём — крестик, к вечеру — ясно.

Чек-лист последнего вечера

Вечер накануне экзамена. Карандаш в руку — и по пунктам.

☐ Документ, удостоверяющий личность, лежит у двери.

☐ Чёрная гелевая или капиллярная ручка и запасная готовы.

☐ Линейка найдена. Обычная, честная, без суперспособностей.

☐ Справочные материалы полистаны заранее: знаю, где формулы объёмов и корней квадратного уравнения.

☐ Помню лампочку бланка: в бланк идут целые числа, конечные десятичные дроби и последовательности цифр. Формат указан в условии и инструкции.

☐ Помню: хвост условия читается до решения. «Укажите меньший» — это не мелкий шрифт, это половина балла.

☐ Новых сложных задач после девяти вечера не решаю. Вечер — для лёгкого повторения и чистой совести.

☐ Будильник заведён с запасом, завтрак запланирован: голодный мозг норовит складывать проценты между собой.

☐ Ложусь спать вовремя: пусть мозг за ночь сам разложит прототипы по полочкам.

Заключение, или Честное признание напоследок

Это пособие не претендует на полноту. Книга проходит по всем номерам базового ЕГЭ: здесь разбираем основные приёмы, а в тренажёрах практикуемся на других задачах.

Цель у книги другая. Девятиклассникам начать мешало слово «надо», выпускникам мешает слово «успеется» — и эта книга написана против него. Экзамен, который принято считать лёгким, коварен именно расслабленностью: баллы на базе теряют не на формулах, а на хвостах условий, потерянных минусах и переведённых в 0,33 третях. Двадцать одна глава — это двадцать одна такая ловушка, показанная заранее и при свете. Чем больше ловушек вы увидели до экзамена, тем меньше их сработает на нём.

Мерило успеха у книги скромное. Если, полистав её, вы открыли тренажёр, прошли разминку или хотя бы перестали произносить «база — это изи» без внутренней усмешки — миссия выполнена: подготовка началась, а это и был самый трудный шаг. Дальше — практика, варианты целиком и спокойный темп.

И последнее, семейное. Клеточка вернулась и устроилась в кадастровую палату. Крокодил подрос. Метод отчаянного девятиклассника дослужился до выпускника. А икс — икс всё ещё ждёт, и он дождётся: вы теперь знаете, где его искать.

Все тренажёры к этой книге — бесплатные, интерактивные, работают с телефона: курс «База без пробелов».

Источники для сверки с экзаменом

Задания в книге составлены для тренировки. Порядок номеров, типы и формат ответа сверены с материалами базового ЕГЭ.

- ФИПИ. Демоверсия, спецификация и кодификатор ЕГЭ 2027 года.
- ЕГЭ 2027. Математика. Базовый уровень. 30 типовых экзаменационных вариантов под редакцией И. В. Ященко.
- ЕГЭ 2027. Математика. Базовый уровень. 40 тренировочных вариантов под редакцией Ф. Ф. Лысенко.
- СтатГрад. Тренировочная работа №1 по математике от 30 сентября 2026 года, базовый уровень.