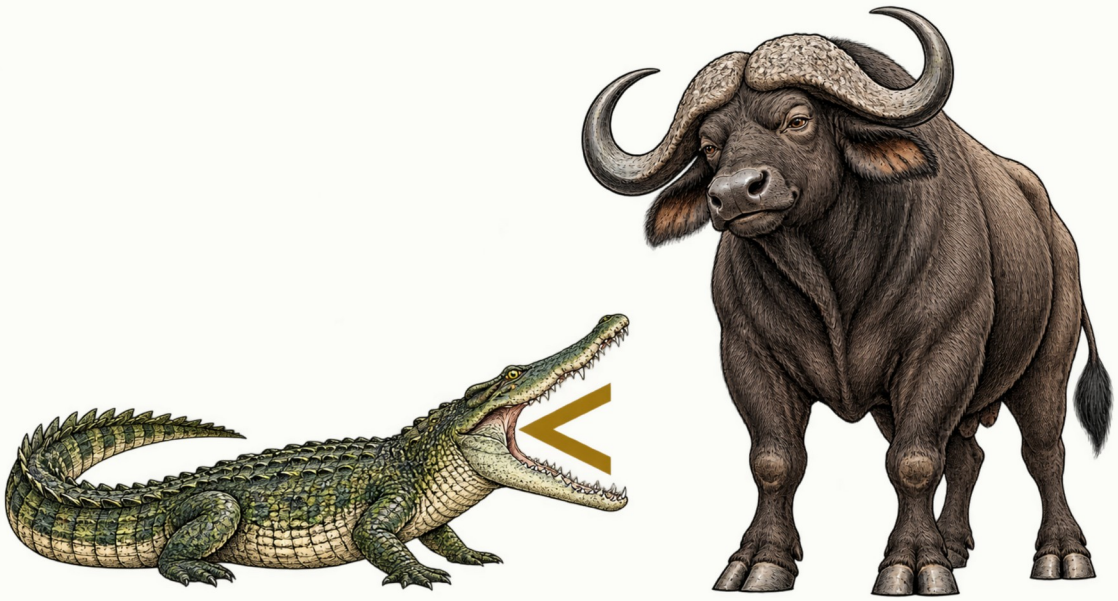
MathExam

МАТЕМАТИКА

Наталья Алябьева

Курс молодого ЕГЭшника

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ



Профильная математика

Задачи и приёмы решения

mathexam.space

КНИЖНАЯ СЕРИЯ MATHEXAM

Учебное пособие · 18 ноября 2026

Оглавление

Как пользоваться книгой · Ответы · Развёрнутые решения · Примеры работ

Часть 1

№	Тема	Стр.
1	Планиметрия	9
2	Векторы	14
3	Стереометрия	19
4	Простая вероятность	23
5	Сложная вероятность	26
6	Уравнения	29
7	Преобразование выражений	32
8	Производная и первообразная	35
9	Задачи с формулой	40
10	Текстовые задачи	43
11	Функции и графики	46
12	Экстремумы и значения функции	52

Часть 2

№	Тема	Стр.
13	Уравнение с отбором корней	55
14	Стереометрия с доказательством	58
15	Неравенство	64
16	Финансы и моделирование	68
17	Планиметрия с доказательством	72
18	Задача с параметром	77
19	Числа и их свойства	82

Как пользоваться книгой

Предисловие, или Зачем эта книга

Меня зовут Наталья Михайловна. Я учитель математики, и это профильная книга серии. Другие книги посвящены ОГЭ и базовому ЕГЭ. Их герои подросли и дошли до развилки, на которой выбирают профиль. И вместе с ними выросло очередное опасное слово.

У девятиклассника это было «надо». У базовика — «успеется». У профильника — «мне всё равно не решить». Профиль же. Экзамен для избранных. Вторая часть — для олимпиадников, восемнадцатое — для гениев, а я лучше выучу первую часть и не буду смотреть в сторону остального.

И вот что я вам скажу как человек, который каждый год наблюдает, чем это заканчивается: на страшном экзамене баллы теряют не потому, что задачи неподъёмные, а потому, что в них заранее решили не заглядывать. Страх ворует баллы ещё до входа в аудиторию — оптом, целыми заданиями. А внутри этих заданий, если всё-таки заглянуть, обнаруживаются лесенки частичных баллов, методы с именами и пункты а), которые берутся за три строчки. Недооценка воровала баллы с ленивой улыбкой; переоценка страха ворует их с почтительным поклоном — «это не для меня». Оба вора лечатся одинаково: посмотреть устройству экзамена в глаза.

Поэтому книга снова написана наоборот. Не «соберись, это серьёзный экзамен», а «смотри, как устроено каждое из девятнадцати заданий, где в нём платят баллы и каким инструментом они берутся». Внутри всё по-настоящему: реальные типы, реальные критерии, рабочие приёмы и курс тренажёров, в котором можно практиковаться бесконечно. Просто рассказано это голосом человека, который прошёл путь до профиля много раз вместе со своими учениками и точно знает: сдать профиль — можно. Сдать хорошо — можно. А заодно, страшно сказать, обнаружить, что параметр — красивая задача, а не кара небесная.

Если вы читали предыдущие книги — с возвращением: хвост условия по-прежнему читается до решения, икс дождался, а крокодил остался работать в базовой книге: здесь проверяют живые эксперты, и у них всё строго по критериям. Если не читали — ничего страшного: эта книга самостоятельная.

P. S. Если вы взрослый и купили эту книгу выпускнику — спасибо. Только, вручая, не говорите «профиль — это очень серьёзно, пора браться за ум». Скажите: «смотри, тут написано, за что именно эксперты дают баллы». Работает лучше.

Читайте, решайте, удивляйтесь, что не страшно. Можно всё сразу.

С верой в каждого выпускника,

Наталья Михайловна, учитель математики, автор тренажёров mathexam.space



Как устроена эта книга

На каждый из девятнадцати номеров экзамена здесь заведено досье из семи пунктов.

- **Что хотят.** Коротко и честно: что именно проверяет задание.
- **Классическая ловушка.** Место, где чаще всего теряют балл. Все ловушки настоящие: проверено поколениями выпускников и критериями проверки.
- **Вредный совет.** Так делать не нужно. Пункт написан для смеха — и для прививки: посмеявшись над вредным советом, следовать ему уже как-то неловко.
- **А теперь серьёзно.** Рабочий приём без шуток. Ну, почти без шуток.
- **Карта темы.** Основные подтипы задания и приёмы, которые помогут начать решение.
- **Разбор основных прототипов.** Типовые задачи, решённые до конца, шаг за шагом; «дальше очевидно» здесь не водится. Прочитали разбор — закройте его и решите сами.
- **Проверь себя.** Несколько задач для самостоятельной тренировки. Ответы — в конце книги.

У глав второй части — заданий 13–19 — есть восьмой пункт: **Прейскурант эксперта.** Это ценник задания: сколько оно стоит, за что дают промежуточные баллы и где их теряют на ровном месте. Частичный зачёт уточняйте по критериям конкретной задачи.

Рядом с заголовком главы есть QR-код упражнений по этому номеру на MathExam. После разбора выполните «Проверь себя». К заданиям второй части даны развёрнутые решения в приложении.

Тренажёры с бумаги. Если QR-код не открывается, зайдите на mathexam.space/ege-profil/ и выберите номер ЕГЭ из заголовка главы. Для заданий 13–19 здесь же открывается вторая часть курса.

Важно: это обзорный маршрут по всем номерам экзамена, а не полный каталог прототипов. Задача книги — показать устройство каждого задания, его главную ловушку и рабочий приём, а затем передать вас систематической практике.

Читать можно подряд, а можно открывать с любого места. Сквозные приёмы — лампочка бланка, хвост условия, «числа в самом конце», проход по границам поимённо, словарь ответов — представляются при первом появлении и дальше просто работают.

Краткий брифинг: что вообще происходит

В утверждённой модели ЕГЭ-2027 по профильной математике 19 заданий и 3 часа 55 минут. Экзамен двухэтажный, и этажи проверяются по-разному.

- Задания 1–12 — первая часть, краткий ответ в бланк: целое число или конечная десятичная дробь. Каждое стоит один первичный балл.
- Задания 13–19 — вторая часть, развёрнутое решение на отдельном бланке. Его читают два независимых эксперта; при существенном расхождении оценок работу смотрит третий. Цены: 13 — 2 балла, 14 — 3, 15 — 2, 16 — 2, 17 — 3, 18 — 4, 19 — 4.
- Итого максимум — 32 первичных балла; их переводят в стобалльную шкалу, и именно она едет в вузы. Шкалу перевода и минимальные баллы сверяйте по документам своего года. Условия поступления публикует каждый вуз.
- Вместе с работой выдают справочные материалы — короткий лист, сердце которого четыре тригонометрические формулы. Это официальная шпаргалка; главы 7 и 13 научат выводить из неё остальное.
- Калькулятор запрещён. Линейка разрешена. Черновик не проверяется: для первой части всё ценное живёт в бланке ответов, для второй — в развёрнутом решении.

Мифы и легенды профильного ЕГЭ

Миф первый. «Профиль — это для гениев». Профиль сложнее базы — это правда. Но двенадцать заданий первой части проверяют технику, а не талант: за них можно

получить 12 первичных баллов. Этот результат зависит от регулярной тренировки. А вторая часть градуирована: у каждого задания есть прейскурант с промежуточными баллами, и «частично решил» здесь — официальная, оплачиваемая категория.

Миф второй. «Первую часть тренировать не надо — сама решится». Самые обидные потери экзамена — именно тут: перепутанный хвост условия, потерянная треть пирамиды, точка вместо значения. Ошибка в «лёгком» задании стоит столько же первичных баллов, сколько невзятый пункт в сложном, — а достаётся вдвое дешевле. Первая часть тренируется до автоматизма, и серия без промахов важнее количества решённого.

Миф третий. «Эксперты валят и снимают за почерк». Критерии открыты и публикуются вместе с демоверсией ФИПИ. Эксперт не снимает баллы — он начисляет за то, что есть в работе: за метод, за обоснование, за границы. Подходит любой математически верный способ при понятном и обоснованном ходе решения. Пишите разборчиво. Хотите убедиться — тренажёр эксперта покажет вам работы с той стороны стола.

Миф четвёртый. «Задания 18 и 19 не решает никто». В восемнадцатом отделите математическую модель от разбора случаев. В девятнадцатом попробуйте построить и проверить пример из пункта а). У обоих заданий есть частичный зачёт. Его условия зависят от работы. «Никто не решает» на языке критериев означает «многие не открывают» — и это лечится главами 18 и 19.

Миф пятый. «Главное — прорешать сто вариантов». Вариант без разбора ошибок — тренировка этих самых ошибок. Работает цикл: пробник в полном хронометраже → журнал ошибок → закрыть открытые типы → следующий пробник. Сто вариантов без цикла проигрывают двадцати с ним — и по баллам, и по времени.

Экипировка выживальщика

Что берём с собой на экзамен.

- **Паспорт.** Без него в аудиторию пустят только вашу тревогу, а она путает точку минимума с наименьшим значением.
- **Две чёрные гелевые ручки.** Первая — рабочая, вторая — страховка и талисман. Во второй части ручка пишет много: проверьте, что обе расписаны.
- **Линейка без формул.** Обычная, честная. Ровный чертёж помогает увидеть связи. В письменном решении покажите, чем эти связи обоснованы.
- **Справочные материалы.** Выдадут с работой: четыре тригонометрические строки будут ждать на столе. Изучите это меню заранее — и потренируйте вывод остальных формул, главы 7 и 13 показывают как.

- **Вода и шоколадка.** Три часа пятьдесят пять минут — марафон; правила своего пункта уточните заранее.
- **Калькулятор остаётся дома и грустит.** Третий сезон подряд. Утешьте его тем, что в задании 7 он всё равно застрял бы в бесконечном хвосте тангенса.
- **Знания и оформление.** Двойной предмет экипировки профиля: мало решить — надо предъявить. Навык письменного решения тренируется заранее, как и всё остальное; на экзамене ручка должна думать вместе с головой, а не вместо неё.

Как оформить вторую часть

Пометьте пункты а) и б), если они есть. Сохраняйте обозначения из условия. Запишите ограничения до преобразований, обоснуйте ключевые переходы и в конце ответьте на вопрос задачи своими результатами. Если решение помещается в несколько строк, проверьте, что из этих строк видно, откуда взялся ответ.

В тригонометрическом уравнении с отбором сначала выпишите все серии корней. Затем для каждой серии покажите, какие значения целого параметра попали на отрезок. Эта строка объясняет отбор. Круг или график помогают, когда на рисунке подписаны нужные точки, границы и обороты.

В геометрии подпишите вспомогательные точки. Укажите признак подобия, равенства или перпендикулярности и покажите, где выполнены его условия. В финансовой задаче объясните, какие суммы меняются после начисления процентов и платежа. В задаче на наибольшее или наименьшее значение обоснуйте границу и покажите пример, в котором она достигается.

Посмотрите работы выпускников и комментарии экспертов ФИПИ. В образце 13.1.2 список корней совпал с ответом, но разметка окружности не обосновала отбор, поэтому эксперт поставил один балл. Для своего года сверяйте баллы по критериям демоверсии ФИПИ.

Разминка

Если профильная задача падает не на идее, а на технике — раскрылась не та скобка, уехал знак, степень сложилась вместо того, чтобы перемножиться, — начинать нужно не с прототипов, а отсюда. Из этой разминки можно сразу узнать, на какой школьный навык стоит потратить пять минут.

Экспресс-диагностика. Восемь задач, по одной на каждую болевую точку. Решите письменно, как на экзамене, а не «на глазок»:

1) Вычислите 97^2 приёмом квадрата разности.

2) Вычислите $2 : (1/3 + 1/6)$.

3) Вычислите $5^{-2} \cdot 5^{4}$.

4) Решите уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$.

5) Вычислите $\sqrt{48} - \sqrt{12}$.

6) Вычислите $\cos(\pi/3)$.

7) Вычислите $\log_2 32$.

8) Вычислите $-3 - (-7) \cdot 2$.

Маршруты. Ошиблись — вот куда идти, пока пробел маленький.

- Задача 1 — формулы сокращённого умножения: рабочая лошадь глав 7 и 13; для дополнительной практики откройте подборку MathExam.
- Задача 2 — этажерка: старая знакомая из базовой книги; порядок наводится поэтажно, глава 7 напомнит.
- Задача 3 — степени: отрицательный показатель — «единица делить», показатели складываются; глава 7.
- Задача 4 — Виет и дискриминант: глава 6, и читайте хвост условия.
- Задача 5 — корни: вынести множитель из-под корня; глава 7.
- Задача 6 — табличные значения: тренажёр тригонометрии, раздел про числовую окружность; пригодится в главах 7 и 13.
- Задача 7 — определение логарифма: логарифм — это показатель; главы 6 и 7.
- Задача 8 — знаки: если дрогнула рука на минусах, загляните в базовые тренажёры сайта — пять минут в день, и минусы становятся ручными.

Ответы разминки (живут прямо здесь — за ними не надо идти в конец книги): 1) 9409; 2) 4; 3) 25; 4) 2 и 3; 5) $2\sqrt{3}$; 6) 0,5; 7) 5; 8) 11.

Округление и пробная цифра

149 можно округлить до 150 по десяткам и до 100 по сотням. Оба результата получают из 149. Если делитель оказался равен нулю после округления, оставьте его точным.

Точная проверка. Пусть N — текущее неполное делимое, d — делитель, c — пробная цифра. Ищем c от 0 до 9 так, чтобы $d \cdot c \le N < d \cdot (c + 1)$. Для первых цифр 138 в делении 138138 на 46 прикидка 100 : 50 даёт 2. Но $46 \cdot 3 = 138$, поэтому пишем 3.

Два нуля внутри частного. Сносим 1, потом 3. Неполные делимые 1 и 13 меньше 46, поэтому записываем две цифры 0. Со снесённой восьмёркой снова получается 138. Пишем 3. Получили 3003. Проверка даёт $46 \cdot 3003 = 138138$.

Проверь себя. 5124 : 17. Сначала подбери цифру для 51, потом проверь, что происходит при сносе двойки. Ответ: 301, остаток 7.

Тренажёры MathExam. Округлять до десятков · Округлять до сотен · Прикинуть цифру частного.

Задание 1 Планиметрия без промахов



Упражнения к заданию №1

Что хотят. Профильный вариант открывается чертежом. Нужно найти угол, длину или площадь. Сначала разглядите, какие сведения даны, и отметьте их на рисунке. У первой задачи обычно хватает одного главного свойства и короткого расчёта.

Классическая ловушка. Угол, который «на глаз почти прямой», может оказаться иным по условию. Чертёж помогает увидеть связи, а каждое равенство опирается на данные или теорему. Глазомер отлично работает до первой необычной картинки.

Вредный совет. «Приложи к рисунку ручку, прикинь наклон — вот тебе и градусы. Художники веками так работали, и ничего».

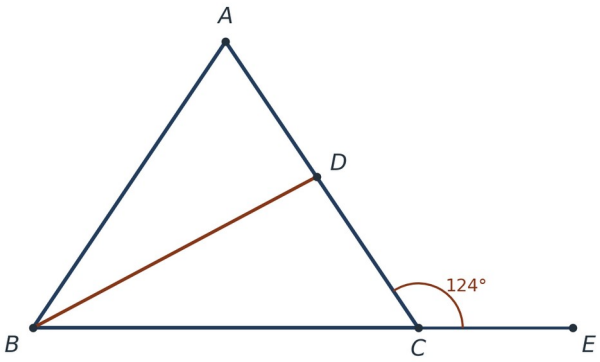
А теперь серьёзно. Подчеркните, что спрашивают. Пометьте на чертеже равные стороны, прямые углы, параллельность и точки касания, если они даны. В прямоугольном треугольнике гипотенуза служит диаметром описанной окружности, а радиус вписанной окружности равен $(a + b - c)/2$, где a и b — катеты, c — гипотенуза. Перед записью ответа прикиньте, подходит ли результат фигуре. Угол треугольника лежит между 0° и 180°, площадь положительна, катет короче гипотенузы.

Карта темы

- **Треугольники.** Сумма углов равна 180°. У равнобедренного треугольника углы при основании равны. Биссектриса делит угол пополам. Средняя линия параллельна третьей стороне и равна её половине.
- **Прямоугольные треугольники.** Пифагор связывает три стороны. Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе, тангенс — отношению противолежащего катета к прилежащему.
- **Четырёхугольники.** Средняя линия трапеции равна полусумме оснований. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей. У четырёхугольника с вписанной окружностью суммы противоположных сторон равны.
- **Окружность.** Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается. Угол, опирающийся на диаметр, прямой. Касательная перпендикулярна радиусу в точке касания.
- **Площади.** У треугольника берите половину произведения стороны на высоту к ней. При подобии с коэффициентом k отношение площадей равно k^2.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — равнобедренный треугольник и биссектриса. В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Сторону BC продолжили за точку C до точки E, причём угол ACE равен 124°. Биссектриса угла ABC пересекает AC в точке D. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.



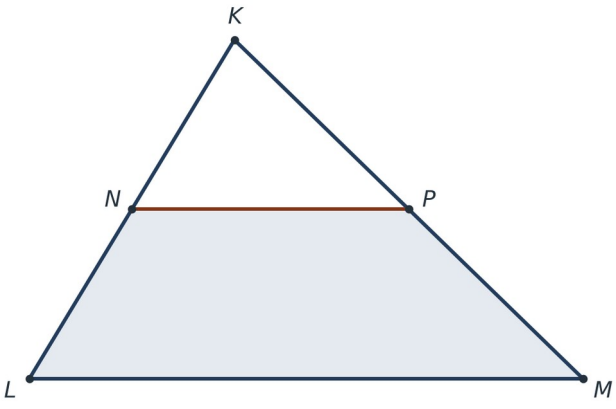
Шаг 1. Углы ACB и ACE смежные. Угол ACB равен 180° − 124° = 56°. Такой же угол ABC при втором конце основания.

Шаг 2. Биссектриса делит угол ABC пополам. Получаем ∠ABD = 28°. Угол BAC равен 180° − 56° − 56° = 68°.

Шаг 3. В треугольнике ABD сумма углов равна 180°, значит, ∠ADB = 180° − 68° − 28° = 84°.

Ответ: 84.

Прототип 2 — площадь и средняя линия. В треугольнике KLM точки N и P — середины сторон KL и KM соответственно. Площадь трапеции NLMP равна 84. Найдите площадь треугольника KNP.



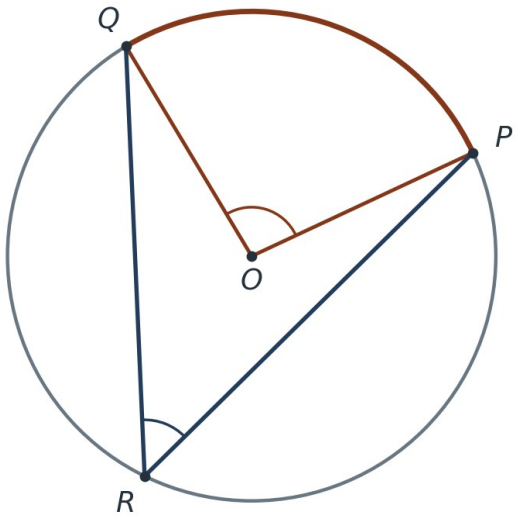
Шаг 1. Средняя линия NP параллельна LM. Треугольники KNP и KLM подобны с коэффициентом 1/2.

Шаг 2. Отношение их площадей равно $(1/2)^2 = 1/4$. На трапецию приходится три таких доли.

Шаг 3. Площадь KNP равна 84 : 3 = 28. Проверка — 28 + 84 = 112, и четверть от 112 равна 28.

Ответ: 28.

Прототип 3 — два угла на одной дуге. Точки P, Q и R лежат на окружности с центром O. Дуга PQ, которая не содержит R, меньше полуокружности. Центральный угол POQ на 48° больше вписанного угла PRQ. Найдите сумму этих углов. Ответ дайте в градусах.



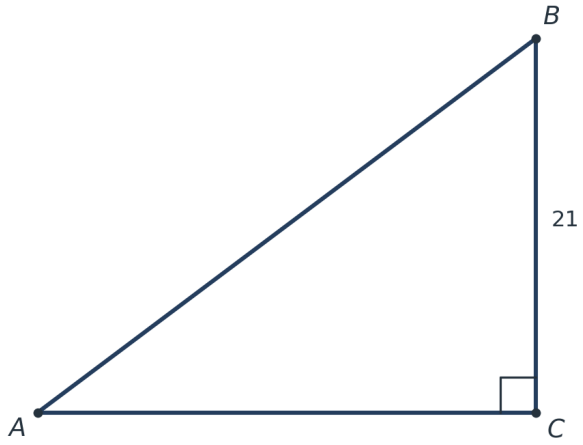
Шаг 1. Обозначим ∠PRQ буквой α. Центральный угол POQ, опирающийся на ту же дугу PQ, равен 2α.

Шаг 2. По условию 2α − α = 48°, значит, углы равны 48° и 96°.

Шаг 3. Складываем углы и получаем 144°. Перед записью взгляните на вопрос ещё раз: спрашивали сумму.

Ответ: 144.

Прототип 4 — косинус в прямоугольном треугольнике. В треугольнике ABC угол C прямой, катет BC равен 21. Гипотенуза AB на 7 больше катета AC. Найдите cos A.



Шаг 1. Пусть AC = x. Тогда AB = x + 7. По теореме Пифагора $x^2 + 21^2 = (x + 7)^2$.

Шаг 2. После раскрытия скобок получаем 14x + 49 = 441, значит, x = 28 и AB = 35.

Шаг 3. Прилежащий к углу A катет имеет длину 28. Получаем cos A = 28/35 = 0,8.

Ответ: 0,8.

Проверь себя

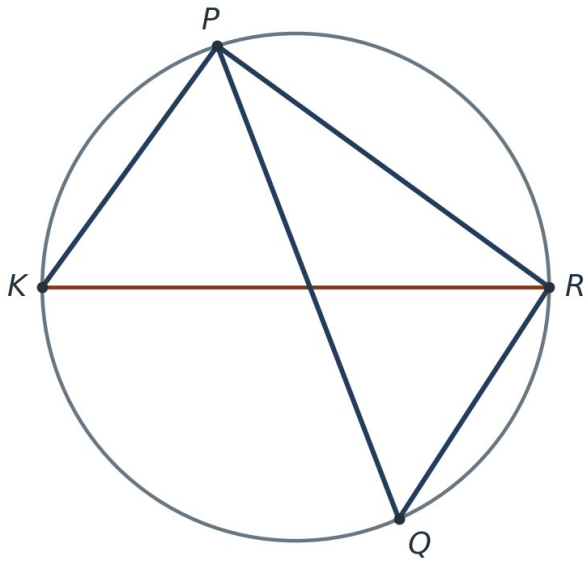
Ответы в конце книги. Если спрашивают угол, впишите в бланк только число.

1) В треугольнике KLM сторону LM продолжили за точку M до точки N. Угол KMN равен 143°, угол LKM равен 48°. Найдите угол KLM. Ответ дайте в градусах.

2) Средняя линия трапеции равна 20. Одно основание на 14 длиннее другого. Найдите длину меньшего основания.

3) В четырёхугольник KLMN вписана окружность. Известно, что KL = 7, LM = 9, MN = 12. Найдите периметр четырёхугольника.

4) На окружности последовательно расположены точки K, P, R и Q. Отрезок KR — диаметр, угол KRP равен 36°. Найдите угол PQR. Ответ дайте в градусах.



5) Площадь ромба равна 126. Одна диагональ на 4 длиннее другой. Найдите меньшую диагональ.

Задание 2 Стрелки, которые считают

Упражнения к заданию №2

Что хотят. Прочитать векторы по рисунку или координатам, выполнить действие и записать одно число. Это может быть длина, скалярное произведение, косинус угла или одна неизвестная координата. Прежде чем считать, подчеркните, что именно просят найти.

Классическая ловушка. В записи AB стрелка идёт от A к B. Рука тянется вычесть координаты «по порядку букв», а здесь работает правило «конец минус начало». Одной длиной ошибку не поймать, потому что квадраты стирают знаки. Скалярное произведение и косинус знаки помнят.

Вредный совет. «Стрелку можно рисовать в любую сторону. Длина осталась такой же — значит, и вектор тот же».

А теперь серьёзно

1. Откуда и куда? Вектор можно изобразить направленным отрезком. У стрелки есть начало и конец. Равные ненулевые векторы имеют одинаковые длину и направление, поэтому стрелку можно перенести параллельно самой себе. Чтобы получить противоположный вектор, разверните её. У нулевого вектора начало и конец совпадают, его длина равна нулю.

2. Как сложить стрелки? Поставьте начало второй стрелки в конец первой. Сумма идёт от начала первой в конец второй. Это правило треугольника. Если у стрелок общее начало, достройте параллелограмм. Из общего начала в противоположную вершину идёт та же сумма. Чтобы найти разность, прибавьте противоположный вектор.

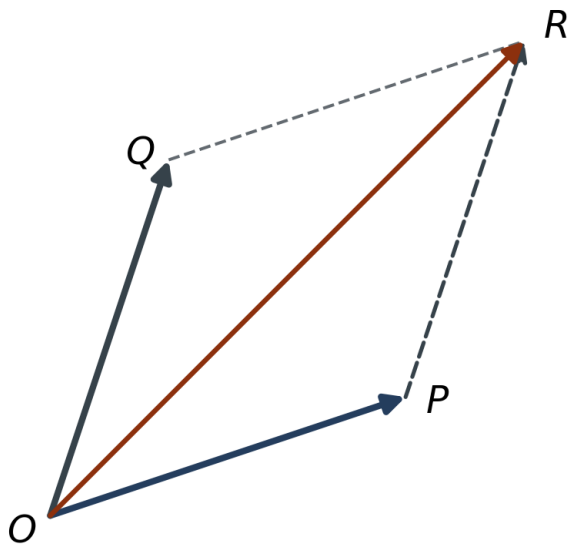
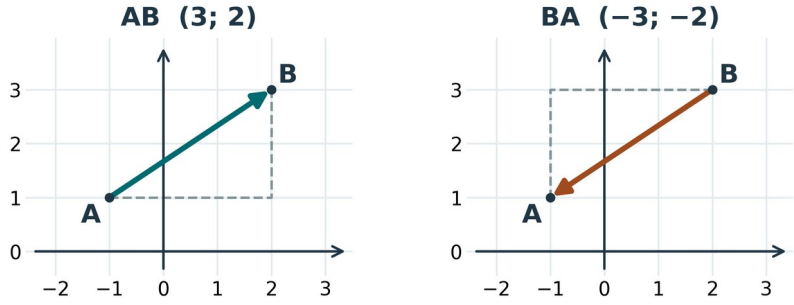


Рис. 2.1. Векторы OP и OQ складываются в OR. Из P в R ведёт копия вектора OQ.

3. Как снять координаты? Пройдите глазами от начала к концу стрелки. По горизонтали вправо — плюс, влево — минус. По вертикали вверх — плюс, вниз — минус. Если даны точки A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2), то координаты вектора AB равны ($x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$).

На клетках. Пусть A(−1; 1) и B(2; 3). Из A в B идём на три клетки вправо и на две вверх. Из B в A — на три влево и на две вниз. Получаем AB = (3; 2) и BA = (−3; −2). Длины одинаковы, а направления противоположны.



При развороте вектора обе координаты меняют знак.

4. Как считать? Складывайте, вычитайте и умножайте векторы на число покоординатно. Длина вектора (x; y) равна $\sqrt{x^2 + y^2}$. Скалярное произведение векторов (x_1; y_1) и (x_2; y_2) равно $x_1x_2 + y_1y_2$. Чтобы найти косинус угла, разделите скалярное произведение на произведение длин. Эта формула применима, если оба вектора ненулевые. В этом случае нулевое скалярное произведение означает, что векторы перпендикулярны.

Карта темы

- **Длина и координаты.** Сначала запишите сдвиг по каждой оси, затем посчитайте длину.
- **Скалярное произведение.** Умножьте координату x первого вектора на координату x второго. Так же поступите с координатами y. Сложите два результата.
- **Угол между векторами.** Проверьте знак и убедитесь, что косинус лежит от −1 до 1.
- **Фигуры.** В параллелограмме ABCD вектор AC равен сумме AB и AD, а вектор DB — их разности AB − AD. Порядок букв у второй диагонали важен.
- **Микс.** Сначала соберите вектор, затем найдите то, что просят в задаче.

Разбор типовых задач

1. Длина по двум точкам

Стрелка начинается в C(−5; 3) и заканчивается в D(4; −9). Чему равна длина вектора CD?

1. Из координат D вычитаем координаты C. Получаем (4 − (−5); −9 − 3) = (9; −12).
2. Длина равна √(81 + 144) = √225 = 15.

Ответ 15. В длине −12 уйдёт под квадрат. На строку выше знак всё равно нужен.

2. Скалярное произведение по клеткам

На рисунке даны векторы p и q. Разверните q и найдите скалярное произведение p · (−q).

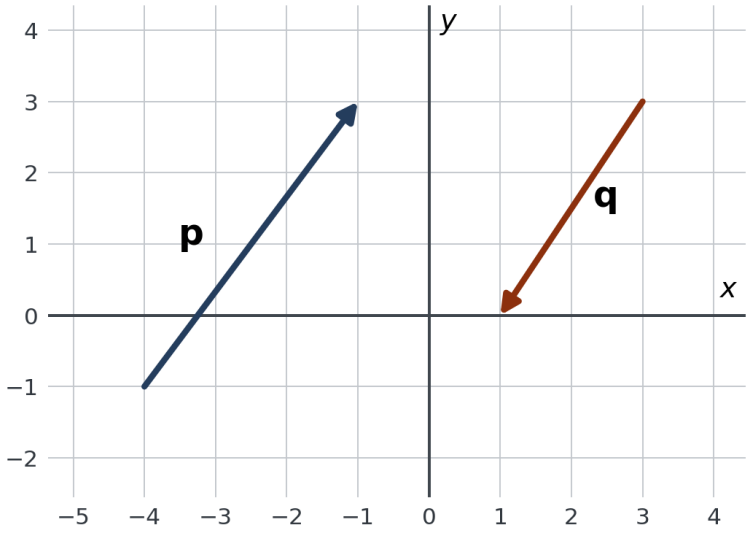


Рис. 2.2. Координаты считайте от начала каждой стрелки к её наконечнику.

1. Стрелка p идёт на три клетки вправо и четыре вверх, значит p = (3; 4). Стрелка q идёт на две влево и три вниз, значит q = (−2; −3).
2. У противоположного вектора оба знака меняются. Получаем −q = (2; 3).
3. Получаем 3 · 2 + 4 · 3 = 18.

Ответ 18. Можно сперва найти p · q = −18 и только потом поменять знак.

3. Косинус угла между векторами

Даны точки A(−2; 1), B(1; 5) и C(7; −3). Найдите косинус угла между векторами AB и BC.

1. AB = (3; 4), BC = (6; −8). Для угла между векторами мысленно совместите начала стрелок.
2. Скалярное произведение равно 3 · 6 + 4 · (−8) = −14.
3. Длины равны 5 и 10. Косинус равен −14 : 50 = −0,28.

Ответ −0,28. У угла ABC первая сторона идёт по BA, а в условии дана стрелка AB. Если перепутать эти направления, поменяется знак.

4. Длина после двух действий

Пусть u = (4; 3) и v = (6; −6). Сначала из u вычитают удвоенный вектор v. Найдите длину результата.

1. Удвоенный вектор 2v = (12; −12).
2. Разность u − 2v = (4 − 12; 3 − (−12)) = (−8; 15).
3. Длина равна √(64 + 225) = √289 = 17.

Ответ 17. Во второй координате вычитаем отрицательное число, поэтому получается прибавление.

Проверь себя

Запишите по одному числу на задачу. Ответы — в конце книги.

1. Даны точки M(1; −2) и N(−2; −6). Найдите длину вектора $-4 \cdot \overrightarrow{NM}$.
2. На сетке изображены векторы c и d. Вычислите $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

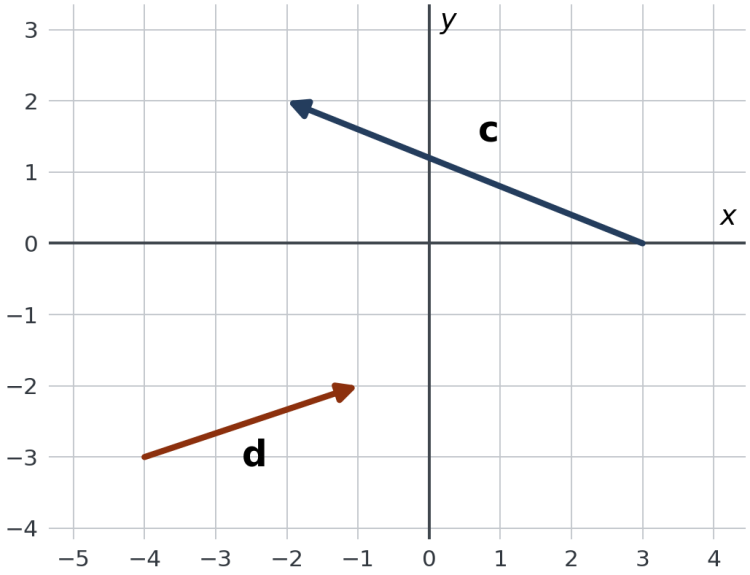


Рис. 2.3. Одна клетка соответствует единице по каждой оси.

3. Векторы u и v имеют координаты (6; 8) и (12; 9) соответственно. Чему равен косинус угла между u и вектором, противоположным v?
4. Даны векторы a = (7; −2), b = (1; 4) и c = (x; 3). Векторы a − b и c перпендикулярны. Найдите x.
5. В параллелограмме EFGH векторы EF и EH имеют координаты (−4; 2) и (4; 8) соответственно. Найдите длину вектора HF.
6. Даны векторы a = (2; 4), b = (−3; −1) и c = (6; 17). Найдите длину вектора 2a + b + c.

На MathExam

Откройте тренажёр к заданию №2. Если путаетесь в начале и конце стрелки, выберите «Длина и координаты» и режим «По шагам». Если готовы к разным типам подряд, переходите в «Микс».

Задание 3 Объём с первого взгляда

Упражнения к заданию №3

Что хотят. Узнать тело, найти объём или площадь поверхности, сравнить целое и часть. В задачах с сечением сначала определите, какую фигуру отсекают. Коробки, банки и мороженое-рожок давно знакомы. Теперь у них появляются паспорта с формулами.

Классическая ловушка. Коэффициент подобия в задаче о площади или объёме. Если ребро куба увеличили вдвое, площадь поверхности вырастет в 4 раза, а объём — в 8. У ловушки два этажа, и на каждом можно споткнуться отдельно.

Вредный совет. «Увеличили ребро вдвое — значит, всего стало вдвое больше. Здравый смысл ещё ни разу не подвёл, особенно в стереометрии».

А теперь серьёзно. Отметьте основание и высоту. Высота идёт перпендикулярно к плоскости основания. У рисунка проверьте обозначения рёбер и пунктир. У задачи про отношение сначала запишите, что делите на что. Если условие меняет единственный размер тела, например лишь высоту цилиндра, используйте формулу объёма и оставьте остальные размеры прежними.

Карта темы

- **Куб и прямоугольный параллелепипед.** Объём равен произведению трёх измерений. Если отсекают пирамиду у вершины, начните с подходящего треугольного основания на грани.
- **Призма и цилиндр.** Объём равен $S_{osn} \cdot h$. У прямой призмы боковое ребро равно высоте. Призма, отсечённая плоскостью, параллельной боковым рёбрам, имеет ту же высоту.
- **Пирамида и конус.** Объём равен $S_{osn} \cdot h/3$. В правильной пирамиде апофема служит высотой боковой грани.
- **Шар и сфера.** У шара $V = 4\pi R^3/3$. Площадь сферы равна $4\pi R^2$, площадь большого круга — πR^2.
- **Подобие.** У подобных тел с коэффициентом k площади относятся как k^2, объёмы — как k^3.
- **Сосуд постоянного сечения.** При полном погружении детали без перелива объём детали равен площади горизонтального сечения сосуда, умноженной на подъём уровня.

Разбор основных прототипов

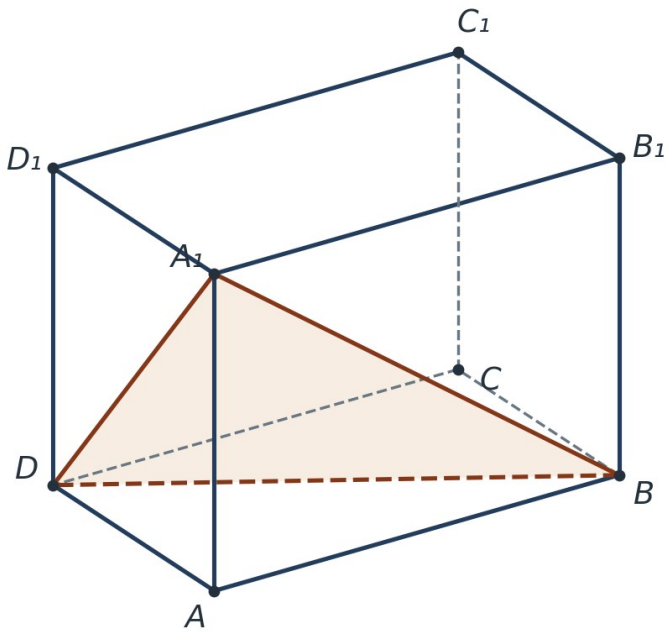
Прототип 1 — от площади к объёму. Площадь поверхности одного куба в 6,25 раза больше площади поверхности другого. Во сколько раз объём первого куба больше объёма второго?

Шаг 1. Отношение площадей равно квадрату отношения рёбер. Получаем $k^2 = 6{,}25$ и $k = 2{,}5$.

Шаг 2. Отношение объёмов равно $k^3 = 2{,}5^3 = 15{,}625$.

Ответ: 15,625.

Прототип 2 — пирамида, отсечённая от параллелепипеда. Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеют длины $AB = 8$, $AD = 5$, $AA_1 = 6$. Плоскость A_1BD отсекает от него пирамиду AA_1BD. Найдите объём оставшейся части.



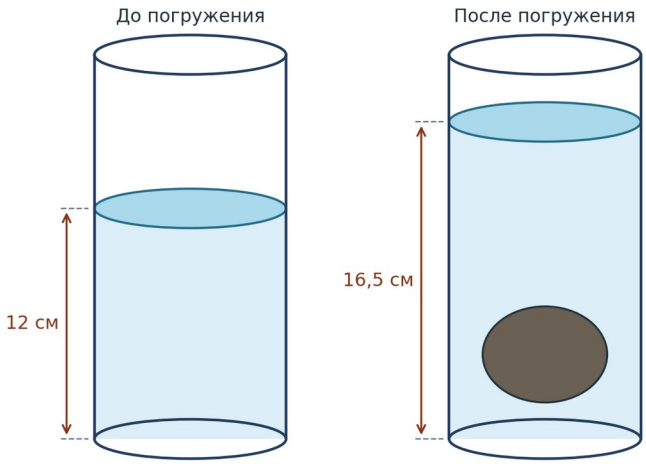
Шаг 1. Объём параллелепипеда равен $8 \cdot 5 \cdot 6 = 240$.

Шаг 2. У пирамиды с вершиной A_1 в основании прямоугольный треугольник ABD. Его площадь равна $8 \cdot 5 : 2 = 20$. Высота AA_1 равна 6.

Шаг 3. Объём пирамиды равен $20 \cdot 6 : 3 = 40$. После отсечения осталось $240 - 40 = 200$.

Ответ: 200.

Прототип 3 — сосуд и погружение. В цилиндрическом сосуде 2160 см³ воды, уровень — 12 см. После полного погружения детали вода не перелилась, а её уровень поднялся до 16,5 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

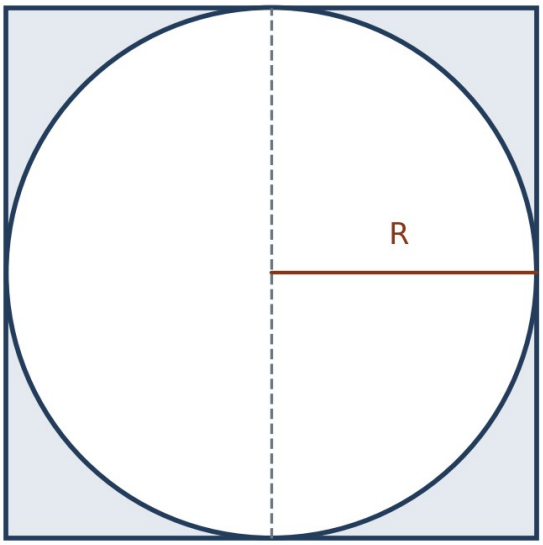


Шаг 1. Площадь горизонтального сечения сосуда равна 2160 : 12 = 180 см².

Шаг 2. Вода поднялась на 16,5 − 12 = 4,5 см. Объём, который заняла деталь, равен 180 · 4,5 = 810 см³.

Ответ: 810.

Прототип 4 — шар внутри цилиндра. Шар касается обоих оснований и боковой поверхности цилиндра. Объём цилиндра равен 96. Найдите объём части цилиндра, находящейся вне шара.



Шаг 1. Если радиус шара равен R, то радиус основания цилиндра также равен R, а высота цилиндра равна 2R.

Шаг 2. Получаем V цилиндра = $2\pi R^3$, V шара = $4\pi R^3/3$. Шар занимает 2/3 объёма цилиндра.

Шаг 3. Остаётся 1/3 объёма цилиндра, то есть 96 : 3 = 32.

Ответ: 32.

Проверь себя

Ответы в конце книги. Перед бланком проверьте, какую часть тела спрашивают.

1) Плоскость, параллельная боковым рёбрам треугольной призмы, проходит через середины двух сторон её основания и отсекает меньшую треугольную призму объёмом 7,5. Найдите объём оставшейся части исходной призмы.

2) Цилиндр и конус имеют равные основания и одинаковые высоты. Их соединили основаниями, так что тела находятся по разные стороны от общей плоскости основания. Объём полученного тела равен 52. Найдите объём конуса.

3) Площади поверхностей двух шаров равны 196 и 588. Площадь поверхности третьего шара равна их сумме. Найдите площадь большого круга третьего шара.

4) Высота пирамиды равна 12, площадь основания равна 36. Сечение, параллельное основанию, пересекает высоту на расстоянии 6 от вершины. Найдите объём пирамиды, отсечённой со стороны вершины.

5) В цилиндрическом сосуде 2100 см³ воды, её уровень находится на высоте 14 см. В воду полностью погрузили камень объёмом 525 см³. На какой высоте установится уровень, если вода не перелилась? Ответ дайте в сантиметрах.

Задание 4 Шансы подросли



Упражнения к заданию №4

Что хотят. Посчитать вероятность одного события. Иногда для этого делят число подходящих исходов на число всех равновозможных. Иногда подсказка уже есть в условии: вероятности двух вложенных событий даны, а вас просят найти вероятность «кусочка» между ними.

Классическая ловушка. «До восьми включительно» — это всё от нуля до восьми, а «от четырёх до восьми» — только часть этого списка. Чтобы оставить нужное, от широкого события отнимают узкое. Если порядок бросков важен, берите его в расчёт и в числителе, и в знаменателе.

Вредный совет. «Событие либо произойдёт, либо нет. Исходов два, благоприятный один, значит, вероятность всегда 0,5. Экзамен сдам? Ну вот, пятьдесят на пятьдесят, я же говорю».

А теперь серьёзно. В жребии сначала подпишите, что выбирают, например фотографию или место в списке. У всех фотографий должны быть одинаковые шансы попасть в выборку. Тогда $P = m / n$, где n — число возможных исходов, а m — число подходящих. Для противоположного события $P(\acute{A}) = 1 - P(A)$. Если событие B целиком входит в A, то вероятность того, что произошло A, но не B, равна $P(A) - P(B)$. Ответ в бланк — целое число или конечная десятичная дробь. Лампочка в конце: вероятность лежит от 0 до 1.

Карта темы

- **Жеребьёвка.** Если порядок выбирают равновероятно, каждый участник с одинаковой вероятностью занимает заранее указанное место.
- **Выбор из набора.** Общее количество — знаменатель. Для противоположного события удобнее сначала посчитать то, что явно перечислено.
- **Вероятность по двум порогам.** Перечислите или отметьте нужные значения, чтобы случайно не потерять пограничное.
- **Порядок у бросков.** Запись ОР и запись РО — два разных исхода.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — жребий на последнее место. На концерте 18 номеров исполнят скрипачи, 12 — пианисты, 15 — вокалисты и 5 — гитаристы. Каждый номер входит

ровно в одну группу. Порядок номеров определяют равновероятным жребием. Найдите вероятность того, что последним окажется номер пианиста или гитариста.

Всего номеров $18+12+15+5=50$. Каждый из них может с равным шансом оказаться последним. Подходящих $12+5=17$. Получаем $17:50=0,34$.

Ответ: 0,34.

Прототип 2 — проще вычесть. В каталоге выставки 125 фотографий. Среди чёрно-белых фотографий 18 снимков с людьми и 32 без людей. Остальные фотографии цветные. Из каталога случайно выбирают одну фотографию. Какова вероятность, что она цветная?

Чёрно-белых фотографий $18+32=50$, их доля $50:125=0,4$. Цветных — все остальные, вероятность $1-0,4=0,6$. Можно проверить прямо: $125-50=75$, и $75:125=0,6$.

Ответ: 0,6.

Прототип 3 — вырезаем нужный промежуток. Справочная служба оценивает число звонков, поступающих за полчаса. Вероятность того, что поступит не больше восьми звонков, равна 0,79. Вероятность того, что поступит не больше трёх, равна 0,27. Найдите вероятность того, что поступит от четырёх до восьми звонков включительно.

Из набора «от 0 до 8» нужно убрать набор «от 0 до 3». Поэтому искомая вероятность равна $0,79-0,27=0,52$. Три вычеркнули, восемь оставили. Границы стоит прочитать поимённо.

Ответ: 0,52.

Прототип 4 — порядок имеет значение. Симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первый и третий результаты совпадут, а второй от них будет отличаться.

При трёх бросках есть $2^3=8$ равновозможных последовательностей. Если первый результат — орёл, подойдёт ОРО. Если первый — решка, подойдёт РОР. В обоих случаях первый знак уже определяет два остальных. Вероятность равна $2:8=0,25$.

Ответ: 0,25.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Сначала скажите себе, кого или что выбирают.

1) В архиве 80 анкет. Синим штампом отмечены 14 бумажных анкет формата А3 и 11 анкет формата А4. У остальных анкет синего штампа нет. Одна анкета выбирается случайно. Найдите вероятность того, что на ней не будет синего штампа.

2) В жеребьёвке на порядок демонстраций участвуют 24 задачи по алгебре, 16 по геометрии и 10 по теории вероятностей. Каждый порядок равновероятен. Найдите

вероятность того, что второй по порядку будет задача по геометрии или теории вероятностей.

3) Вероятность того, что к открытию кафе придёт больше пяти посетителей, равна 0,86. Вероятность того, что их придёт больше двенадцати, равна 0,32. Найдите вероятность того, что придёт от шести до двенадцати посетителей включительно.

4) Бросают обычный симметричный игральный кубик. Найдите вероятность того, что выпадет число меньше пяти, которое не делится на три.

5) Симметричную монету бросают четыре раза. Найдите вероятность того, что первые два результата совпадут, а последние два будут различаться.

Задание 5 Вероятность идёт на повышение



Упражнения к заданию №5

Что хотят. Найти вероятность события, которое собирается из нескольких шагов. В условии может быть задана последовательность результатов, сказано «хотя бы один» или дана вероятность второй развилки при известной первой. Слова короткие — решают много.

Классическая ловушка. Сложение без вычитания. Если сложить вероятности «в первой группе» и «во второй группе», те, кто попал в обе, могут быть посчитаны дважды. А если спрашивают «среди отобранных», меняется знаменатель: сравнивать надо с вероятностью самого отбора.

Вредный совет. «Вероятностей стало две? Сложи. Стало три? Сложи три. Если вышло больше единицы, событие просто очень вероятное».

А теперь серьёзно. Для двух случаев на одном пути работает $P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$. При независимости второй множитель равен $P(B)$. Вероятности непересекающихся путей складывают. Для любых двух событий $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. «Хотя бы один» часто удобнее посчитать как $1 - P(\text{ни одного})$. Остаётся лампочка: у дерева вероятности исходящих из одной вершины ветвей складываются в единицу, даже если одна ветвь дальше не нужна.

Карта темы

- **Указана последовательность.** Перемножьте вероятности именно тех результатов, которые требуются на каждом шаге.
- **Хотя бы один.** Сначала найдите вероятность, что ни одна попытка не удалась.
- **Пересечение и объединение.** Отследите, входят ли одни и те же исходы в обе части.
- **Полная вероятность.** Сложите вероятности всех непересекающихся путей к событию.
- **«Среди тех, кто…».** Найдите вероятность совместного события и поделите её на вероятность условия. При $P(A) > 0$ получаем $P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — фиксированный порядок. Биатлонист делает два выстрела лёжа и один стоя. Вероятность попадания при каждом выстреле лёжа — 0,8, при выстреле стоя —

0,75. Результаты независимы. Какова вероятность, что он попадёт первым выстрелом, промахнётся вторым, а стоя попадёт?

Второй выстрел должен закончиться промахом, его вероятность $1-0,8=0,2$. У всех трёх результатов указан порядок. Вероятность последовательности равна $0,8\cdot 0,2\cdot 0,75=0,12$.

Ответ: 0,12.

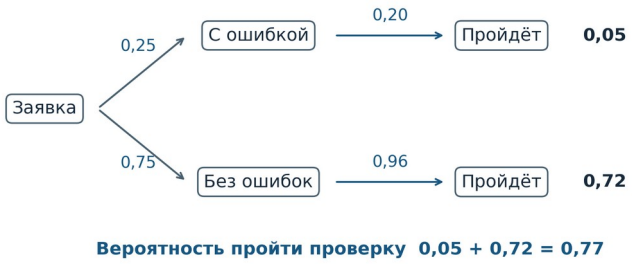
Прототип 2 — два порога одновременно. На линии фасовки взвешивают упаковки. Вероятность того, что упаковка весит не меньше 190 г, равна 0,87. Вероятность того, что она весит не больше 210 г, равна 0,93. Найдите вероятность того, что упаковка весит от 190 до 210 г включительно.

Слева от нужного диапазона остаётся событие «меньше 190 г» с вероятностью $1-0,87=0,13$. Справа — «больше 210 г» с вероятностью $1-0,93=0,07$. Одна упаковка не может оказаться по обе стороны. Нужная вероятность равна $1-0,13-0,07=0,8$.

Ответ: 0,8.

Прототип 3 — проверка качества. Среди заявок 25% заполнены с ошибкой. Программа обнаруживает и отклоняет 80% заявок с ошибкой, а также ошибочно отклоняет 4% правильно оформленных заявок. Какова вероятность, что случайная заявка пройдёт проверку?

Два пути ведут к прохождению проверки. Для заявки с ошибкой путь имеет вероятность $0,25\cdot(1-0,8)=0,05$. Для правильно оформленной — $0,75\cdot(1-0,04)=0,72$. Первая и вторая ветви не пересекаются. Складываем: $0,05+0,72=0,77$. На рисунке показаны две подходящие ветви.



Ответ: 0,77. Путь умножаем, пути складываем.

Прототип 4 — кому досталась отметка. Четверть писем в электронном ящике — рекламные. Фильтр отмечает как рекламу 90% рекламных писем и 10% остальных. Случайно выбирают письмо из числа отмеченных. Найдите вероятность того, что оно действительно рекламное.

Доля отмеченной рекламы среди всех писем равна $0,25 \cdot 0,9 = 0,225$. Доля остальных отмеченных писем равна $0,75 \cdot 0,1 = 0,075$. Всего помечено $0,225 + 0,075 = 0,3$. Значит, среди отмеченных доля действительно рекламных равна $0,225 : 0,3 = 0,75$.

Ответ: 0,75. Быстрая проверка через 400 писем: 90 отмеченных рекламных из 120 отмеченных.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Для каждого примера подпишите словами событие, которое считаете.

1) Спортсмен выполняет четыре независимые попытки. Успех в каждой из первых двух имеет вероятность 0,75, в каждой из последних двух — 0,6. Какова вероятность, что первая и четвёртая попытки успешны, а вторая и третья — нет?

2) В двух цехах независимо друг от друга может сработать сигнализация. Вероятности срабатывания за сутки равны 0,15 и 0,3. Найдите вероятность того, что за сутки сигнализация сработает хотя бы в одном цехе.

3) Вероятность того, что утром опоздает первый автобус, равна 0,32, второй — 0,24, оба — 0,09. Какова вероятность, что опоздает ровно один из двух автобусов?

4) Склад отправляет 35% посылок по первому маршруту и 65% по второму. Вероятность задержки составляет 0,08 для первого маршрута и 0,04 для второго. Найдите вероятность того, что случайно выбранная посылка задержится.

5) На складе 20% контейнеров уже использовались. Сканер отмечает 30% бывших в употреблении и 5% новых контейнеров. Какова вероятность того, что случайно выбранный отмеченный контейнер новый?

Задание 6 Икс дождался

Упражнения к заданию №6

Что хотят. Найти корень уравнения и записать число в бланк. В книге про ОГЭ икс только знакомился с вами, в базовой — всё ещё ждал. Теперь он прячется в показателе степени, под корнем, в знаменателе и под знаком логарифма. У задачи обычно один основной ход. Дело за тем, чтобы подобрать его и проверить ответ.

Классическая ловушка. Прочитать условие до уравнения и пропустить просьбу после него. Нашлись два корня, а в бланк нужен только больший, отрицательный или наименьший положительный. Подчеркните это слово до решения. Вторая ловушка встречается у дробей и корней: после преобразования в вычисления может пробраться число, при котором исходное равенство не выполняется.

Вредный совет. «Нашёл корень — пиши. Нашёл два — пиши красивый. Математика, в конце концов, наука о свободе выбора».

А теперь серьёзно. Приведите степени к одному основанию, снимите логарифм по определению, разложите квадратный трёхчлен или упростите дробь. Если есть ограничения, запишите их до преобразований. После возведения в квадрат проверьте найденные числа в исходном уравнении. В бланк задания 6 записывается целое число или конечная десятичная дробь. Например, $3/4$ запишите как $0,75$.

Карта темы

- **Линейные и дробно-рациональные.** Соберите слагаемые с x. Для дроби заранее исключите нули знаменателя, даже если этот знаменатель потом сократится.
- **Квадратные.** Используйте разложение, дискриминант или Виета. При замене переменной вернитесь к x, а потом выполните отбор.
- **Иррациональные.** Сначала оставьте корень в одной части. Если правая часть содержит x, она должна быть неотрицательной. После возведения в квадрат проверьте все кандидаты в исходном равенстве.
- **Показательные.** Подберите общее положительное основание, отличное от 1. Например, $49=7^2$, $1/8=2^{-3}$. Совпадение таких степеней означает совпадение их показателей.
- **Логарифмические.** Аргументы должны быть положительными, основания — положительными и отличными от 1. Равенство $\log_a u=b$ при этих условиях означает $u=a^b$.

- **Тригонометрические.** Если просят один корень, сначала определите, где расположены решения, затем выберите нужное число. Полный отбор на отрезке разбираем в главе 13.

Разбор основных прототипов

Прототип 1. Две степени, одно основание

При каком x выполняется равенство $49^{x-1}=7^{3x-5}$?

Шаг 1. Так как $49=7^2$, получаем $7^{2x-2}=7^{3x-5}$.

Шаг 2. Приравняем показатели. Из $2x-2=3x-5$ следует $x=3$.

Проверка. Слева $49^2=7^4$. Справа $7^{9-5}=7^4$.

Ответ. 3.

Прототип 2. Перейти к общему основанию логарифмов

Найдите корень уравнения $\log_4(3x-2)=\log_2(x-2)$.

Шаг 1. Оба аргумента положительны при $x>2$. На этой области $\log_4(3x-2)=\left(\log_2(3x-2)\right)/2$.

Шаг 2. Умножим на два и используем свойство логарифма степени. Получаем $\log_2(3x-2)=\log_2\left((x-2)^2\right)$. Тогда $3x-2=(x-2)^2$.

Шаг 3. Обозначим $y=x-2$. Выходит $y^2-3y-4=0$, то есть $(y-4)(y+1)=0$. Кандидаты $x=6$ и $x=1$. В ОДЗ входит только 6.

Ответ. 6.

Прототип 3. Квадрат пропустил лишнего

При каком x верно $\sqrt{3x+10}=x$?

Шаг 1. Левая часть неотрицательна, поэтому $x\geq 0$. На этой области подкоренное выражение положительно, можно перейти к $3x+10=x^2$.

Шаг 2. Переносим в одну часть. $(x-5)(x+2)=0$, значит $x=5$ или $x=-2$.

Проверка. При $x=5$ обе части равны 5. При $x=-2$ слева 2, справа -2. Кандидат возник после возведения в квадрат.

Ответ. 5.

Прототип 4. Сокращение с условием

Найдите корень уравнения $\dfrac{x^2-9}{x-3}=2x+1$.

Шаг 1. Знаменатель не равен нулю, значит $x\neq 3$. При этом условии $x^2-9=(x-3)(x+3)$ и дробь равна $x+3$.

Шаг 2. Из $x+3=2x+1$ получаем $x=2$. Запрет на $x=3$ остаётся, найденный корень ему не противоречит.

Ответ. 2.

Прототип 5. Два корня, один в бланк

Запишите отрицательный корень уравнения $(x+1)^2=5(x+1)+6$.

Шаг 1. Пусть $y=x+1$. Тогда $y^2-5y-6=0$, откуда $y=-1$ или $y=6$.

Шаг 2. Возвращаемся к x: получаем $x=-2$ или $x=5$. Отрицательный один.

Ответ. -2.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Чтобы потренироваться именно к бланку, записывайте в ответ одно число.

1. Найдите x, при котором $216^{1-x}=(\sqrt{6})^3$.

2. Какое число обращает в верное равенство $\log_{1/2}(4-2x)=-3$?

3. При каком x значение $\sqrt{37-8x}+3$ равно 8?

4. Найдите больший корень уравнения $2(x-4)^2=18$.

5. При каком значении x определены и равны дроби $\frac{3}{2x+1}$ и $\frac{2}{x-2}$?

6. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\cos(2\pi x/3)=0$.

Тренажёр. Упражнения к заданию 6

Задание 7 Степени и корни. Третий подход к снаряду



Упражнения к заданию №7

Что хотят. Получить число из выражения со степенями, корнями, логарифмами, дробями или тригонометрическими формулами. Снаряд знакомый: в ОГЭ была качалка для чисел, на базе — второй подход. Теперь важнее увидеть преобразование, чем начать считать.

Классическая ловушка. Мозг изобретает свойства по аналогии. Под корнем стоит сумма, и рука тянется написать два отдельных корня. Столь же соблазнительны логарифм суммы и синус суммы. Проверьте, какая операция написана на самом деле. Корень из произведения можно разделить на корни при неотрицательных множителях. Для логарифма произведения нужны положительные множители и допустимое основание. Дробь сокращается на общий **множитель** числителя и знаменателя.

Вредный совет. «Не помнишь свойство — выведи по аналогии. Раз раскрывается скобка $2(a+b)$, значит, и $\sqrt{a+b}$ раскроется. Математика оценит инициативу».

А теперь серьёзно. Когда перед вами степени, сначала попробуйте записать их по одному основанию. У логарифмов ищите произведение, частное и степень, у корней — общий множитель или пару сопряжённых выражений. В тригонометрии начните со знака и формулы, которая связывает данные углы. У дроби выпишите ограничения до сокращения. В бланк записывается одно число — целое или конечная десятичная дробь. Например, $7/4$ записывают как $1{,}75$.

Карта темы

- **Степени.** При общем основании складываем или вычитаем показатели. При возведении степени в степень показатели перемножаем. В задачах с действительными показателями используем положительное основание.
- **Корни.** Извлекаем полный квадрат, объединяем допустимые множители под корнем или пользуемся разностью квадратов. Помним $\sqrt{u^2}=|u|$.
- **Дроби.** Разложите числитель и знаменатель на множители. Значения, запрещённые в исходной записи, остаются запрещёнными и после сокращения.

- **Логарифмы.** При $a>0$, $a\neq 1$, $u>0$, $v>0$ разность $\log_a u-\log_a v$ равна $\log_a(u/v)$. Число $a^{\log_a u}$ равно u. Для смены основания удобно помнить $\log_b a=1/\log_a b$ при допустимых a и b.
- **Тригонометрия.** Приведение, основное тождество и формулы двойного угла сокращают вычисления. В справке к демоверсии ЕГЭ-2027 есть формулы синуса и косинуса суммы и двойного угла. Документы ФИПИ

Разбор основных прототипов

Прототип 1. Корень в показателе сократится

Вычислите $\dfrac{8^{1+\sqrt{3}}}{4^{(3\sqrt{3}-1)/2}}$.

Шаг 1. Основания $8=2^3$ и $4=2^2$. Показатели при основании 2 равны $3+3\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}-1$.

Шаг 2. Вычтем показатели. $(3+3\sqrt{3})-(3\sqrt{3}-1)=4$. Исходное выражение равно 2^4.

Ответ. 16. Корень из трёх можно было ни разу не вычислять.

Прототип 2. Соберите корни под одним знаком

Чему равно $\sqrt{75/32}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{1/16}$?

Шаг 1. Первые два корня перемножаем. Получаем $\sqrt{(75\cdot 6)/32}=\sqrt{225/16}=15/4$.

Шаг 2. Последний корень равен $1/4$. Складываем $15/4+1/4=4$.

Ответ. 4.

Прототип 3. Три логарифма станут одним

Вычислите $\log_{1/4}6+\log_{1/4}24-2\log_{1/4}3$.

Шаг 1. Положительные аргументы 6 и 24 перемножаем, а множитель 2 при последнем логарифме превращаем в степень. Получаем $\log_{1/4}(144/9)=\log_{1/4}16$.

Шаг 2. Поскольку $(1/4)^{-2}=16$, логарифм равен -2.

Ответ. -2.

Прототип 4. Двойной угол и приведение

Найдите значение дроби $\dfrac{3(1+\cos 146^\circ)}{\cos^2 107^\circ}$.

Шаг 1. Так как $146^\circ=2\cdot 73^\circ$, по формуле двойного угла получаем $1+\cos 146^\circ=2\cos^2 73^\circ$.

Шаг 2. $107^\circ=180^\circ-73^\circ$. Поэтому $\cos 107^\circ=-\cos 73^\circ$, а квадраты совпадают. Знаменатель отличен от нуля. Сокращаем.

Ответ. 6. Углы выглядели грозно, а сократились до одного числа.

Прототип 5. Дроби и запрет на сокращённое значение

При $u=-6$ вычислите $\dfrac{u^2-25}{u^2-10u+25}\cdot\dfrac{u-5}{u+2}$.

Шаг 1. Разложим $u^2-25=(u-5)(u+5)$ и $u^2-10u+25=(u-5)^2$. Исходные знаменатели требуют $u\neq 5$ и $u\neq -2$.

Шаг 2. Сокращаем множители $u-5$ и получаем $(u+5)/(u+2)$. При $u=-6$ выходит $(-1)/(-4)=1/4$.

Ответ. $0,25$.

Проверь себя

До вычислений определите, что можно объединить или сократить. Ответы — в конце книги.

1. Вычислите $\dfrac{9^{\sqrt{5}-1}\cdot 3^{6-2\sqrt{5}}}{27}$.

2. Чему равно $\left(\sqrt{18}-\sqrt{8}\right)^2+\sqrt[3]{-27}$?

3. Дано $a>0$, $b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$ и $\log_a b=-2$. Найдите $\log_b\left(\dfrac{a^3}{b\sqrt{b}}\right)$.

4. Вычислите отношение $\dfrac{7^{\log_7 21}}{7^{\log_7 12}}$.

5. Чему равна дробь $\dfrac{2\sin 38^\circ}{\cos 71^\circ\cdot\cos 161^\circ}$?

6. Найдите значение суммы $\dfrac{t^2-4}{t^2+4t+4}+\dfrac{3}{t+2}$ при $t=3$.

Тренажёр. Упражнения к заданию 7

Задание 8 Читаем наклон

Упражнения к заданию №8

Что хотят. По графику функции найти наклон касательной. Или по графику производной понять, где функция растёт, убывает и достигает экстремума. Первое действие в задаче с рисунком — выяснить, чей график перед вами.

Классическая ловушка. Увидеть горбик и записать «максимум». Если на рисунке кривая $y = f'(x)$, максимум этой кривой говорит о значении производной. Саму функцию проверяем по-другому. Ищем, где её производная меняет знак с плюса на минус.

Вредный совет. «График он и есть график. Видишь горбик — пиши: максимум. Разбираться, чья кривая, успеешь после экзамена».

А теперь серьёзно. Два рисунка читаются по-разному.

Что дано	Куда смотреть
График функции $y = f(x)$	На **касательную**. Она поднимается слева направо — $f'(x) > 0$, опускается — $f'(x) < 0$, горизонтальна — $f'(x) = 0$.
График производной $y = f'(x)$	На положение кривой **относительно оси** Ox. Выше — плюс, ниже — минус, на оси — ноль. Смена + на − даёт максимум f, смена − на + — минимум.

Если $f'(x) > 0$ во всех точках интервала, f на нём строго возрастает. У возрастающей дифференцируемой функции производная может равняться нулю в отдельных точках. Например, $f(x) = x^3$ возрастает на всей числовой прямой, хотя $f'(0) = 0$. У строго убывающей функции тоже возможна горизонтальная касательная. Для строгого знака в отдельной точке нужен знак наклона её касательной.

Карта темы

- **Значение производной по касательной.** Возьмите две точки на касательной и разделите приращение y на приращение x. Вычитайте координаты в одном и том же порядке.
- **Знаки производной по графику функции.** Проверьте наклон в каждой отмеченной точке. При подсчёте строгих плюсов или минусов пропускайте горизонтальные касательные.

- **«Перевёртыш»: график производной.** Ищите пересечения оси со сменой знака. Если график f' касается оси и возвращается на ту же сторону, у f в этой точке экстремума нет.
- **Наклон по формуле.** Если дана формула функции, сначала найдите производную, затем подставьте нужную абсциссу. У параллельных прямых одинаковые угловые коэффициенты. Если прямая совпадает с касательной, их угловые коэффициенты тоже одинаковы.
- **Первообразная.** Если $F'=f$, то график f читаем как график производной для функции F. Для площади между графиком и осью используем $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$ на отрезке [a; b], где f непрерывна. На участках по разные стороны от оси площади складываются.

Разбор основных прототипов

Прототип 1. Считаем клетки на касательной

На рисунке 8.1 прямая касается графика f при $x=x_0$. На прямой отмечены узлы $A(-3;4)$ и $B(1;-1)$. Определите $f'(x_0)$.

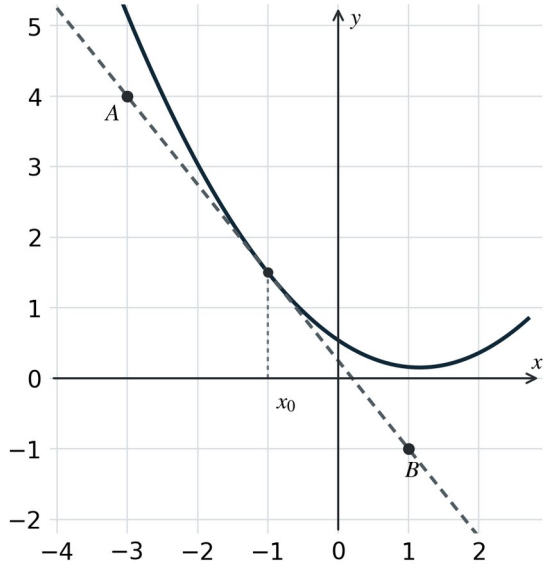


Рис. 8.1. Сплошная кривая — график функции. Пунктирная прямая — касательная.

1. Абсцисса выросла на $1-(-3)=4$.
2. Ордината уменьшилась на 5. Значит, $\Delta y=-1-4=-5$.
3. Наклон касательной равен $\frac{-5}{4}=-1,25$.

Ответ: −1,25.

Прототип 2. Минимум, которого на рисунке ещё нет

На рисунке 8.2 построен график f'. Найдите абсциссу точки локального минимума функции f, принадлежащую отрезку $[-3; 2]$.

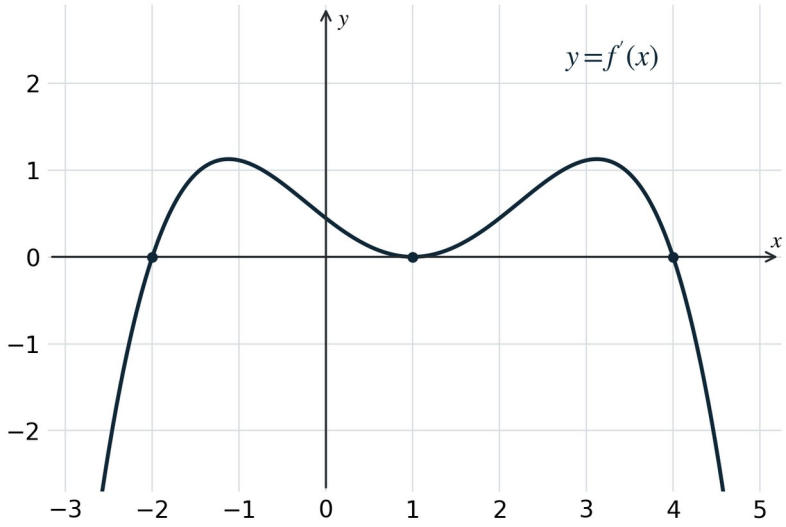


Рис. 8.2. По вертикальной оси отложено значение производной.

1. На отрезке $[-3; 2]$ производная обращается в ноль при $x = -2$ и $x = 1$.
2. Слева от -2 график f' ниже оси, справа — выше. Значит, f переходит от убывания к возрастанию.
3. Возле $x = 1$ график f' с обеих сторон выше оси. Горизонтальная касательная к f здесь есть, экстремума нет.

Ответ: −2.

Прототип 3. Подъём с горизонтальной касательной

На рисунке 8.3 показан график f и касательные в точках с абсциссами a, b, c и d. В скольких отмеченных точках f' строго положительна?

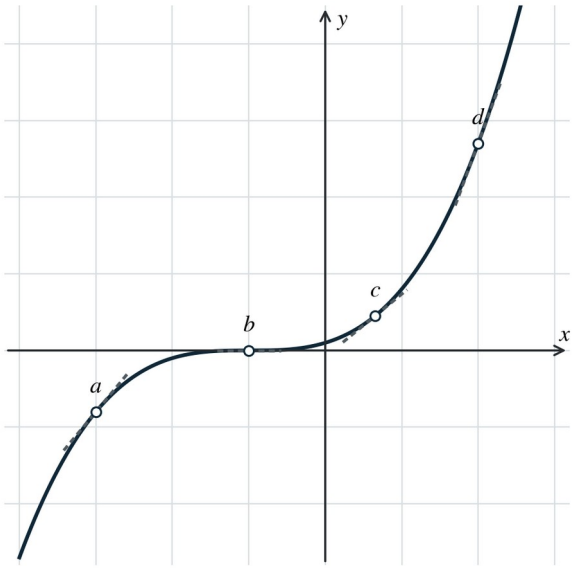


Рис. 8.3. Отрезки пунктирных прямых показывают направление касательных.

1. Касательные при $x=a$, $x=c$ и $x=d$ поднимаются слева направо.
2. Касательная при $x=b$ горизонтальна. Здесь $f'(b)=0$, хотя кривая продолжает расти.

Ответ: 3.

Прототип 4. Читаем наклон по формуле

Функция задана формулой $p(x)=(x-1)(2x+3)$. Каков угловой коэффициент её касательной при $x=-2$?

1. Раскрываем скобки. Получаем $p(x)=2x^2+x-3$.
2. Производная равна $p'(x)=4x+1$.
3. Подставляем -2. Получаем $4\cdot(-2)+1=-7$.

Ответ: −7.

Проверь себя

Перед ответом на задачу с рисунком подпишите рядом «функция» или «производная». Ответы — в конце книги.

1. На касательной к графику f в точке с абсциссой x_0 лежат точки $(-5;-2)$ и $(3;0)$. Чему равно $f'(x_0)$?

2. Точка движется по прямой. В первые четыре секунды её координата в метрах задаётся формулой $x(t)=12+7t-\frac{t^2}{2}$, где t измеряется в секундах. Найдите скорость точки через три секунды после начала отсчёта. Запишите число в метрах в секунду.

3. Используйте график $y = f'(x)$ на рисунке 8.4. Сколько точек локального максимума функции f имеют абсциссы на отрезке [−4; 3]?

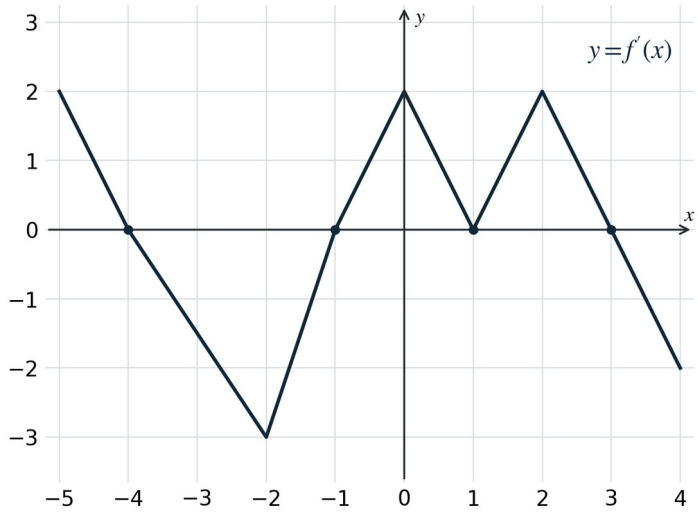


Рис. 8.4. Слева и справа от концов отрезка виден знак производной.

4. Касательная к графику $y = x^2 + b\,x - 3$ в точке с абсциссой 4 имеет такой же угловой коэффициент, как прямая $y = 3\,x + 1$. Найдите b.

5. На рисунке 8.5 проведены касательные к графику f в шести отмеченных точках. В скольких из них $f'(x) < 0$?

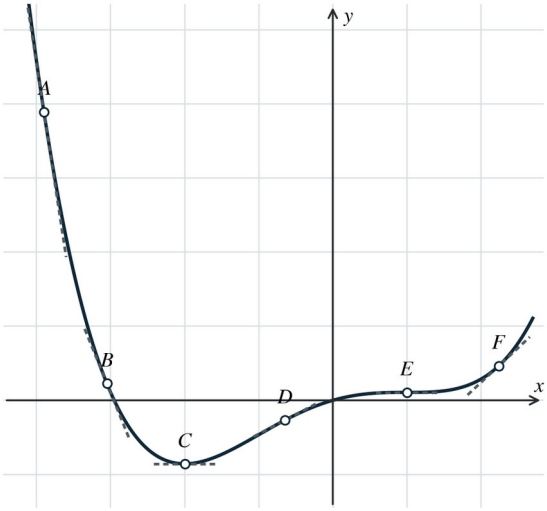


Рис. 8.5. Отрезки пунктирных прямых показывают наклон касательных.

Первообразная и площадь. Пусть на отрезке [−1; 2] график задан формулой $y = x$. Его часть левее нуля находится под осью, часть правее — над осью. Первообразная для x равна $x^2/2$. Площадь слева равна $\frac{1}{2}$, площадь справа равна 2, итого $2{,}5$. Если просто вычислить интеграл функции на всём отрезке, левая часть вычтется.

Тренажёр. Откройте «Производная по графику». Попробуйте двигать точку и наблюдать, как наклон верхней касательной связан со знаком нижнего графика. Потом выберите «Распознавание» и перейдите к задачам.

Задание 9 Формула по-прежнему выдаётся бесплатно



Упражнения к заданию №9

Что хотят. Использовать готовую формулу. Она может связывать путь и время, длину и период колебаний, напряжение и силу тока. Ваша работа — прочитать величины и единицы измерения, составить уравнение или неравенство и сверить ответ с ограничениями задачи.

Классическая ловушка. Квадратное уравнение дало два корня. Оба красивых, оба положительных. Но один мог соответствовать моменту, когда испытание уже закончилось. Голая алгебра не знает расписания, поэтому границы времени надо выписать до вычислений.

Вредный совет. «Нашлось два положительных корня? Возьми больший. Он выглядит убедительнее».

А теперь серьёзно. Выпишите формулу, единицы и допустимые значения. Подставьте известное, решите, затем перечитайте, что требуется: момент времени, длительность или наименьшее допустимое значение. Если параметр должен быть целым, удерживайте исходное неравенство. Для «не меньше» ищем ближайшее допустимое целое сверху, для «не больше» — снизу. Лампочка: для целой границы проверьте найденное число и соседнее, которое уже не подходит.

Карта темы

- **Квадратное уравнение или неравенство.** Проверьте физический диапазон времени и различайте момент события и его длительность.
- **Корень в формуле.** Проверьте знак, затем возведите обе части в квадрат и выразите нужную величину.
- **Логарифм.** Сначала выделите его числовое значение, затем перейдите к степени.
- **Норма или ограничение.** Переведите «не превышает» и «не меньше» в знаки, проверьте допустимость границы.
- **Единицы.** Граммы, килограммы, минуты и секунды согласуйте до подстановки.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — формула и отрезок времени. Во время пятисекундного испытания высота платформы над полом описывается формулой $h = 1 + 8t - t^2$, где h задана в метрах, а t — в секундах от начала испытания и $0 \le t \le 5$. Датчик активен, когда высота не меньше 13 м. Сколько секунд за время испытания он активен?

Нужно $1 + 8t - t^2 \ge 13$, то есть $t^2 - 8t + 12 \le 0$. Разложение $(t-2)(t-6) \le 0$ даёт отрезок $[2;6]$. В условии испытание заканчивается при $t = 5$, поэтому остаётся $[2;5]$. Длительность равна $5 - 2 = 3$ секундам.

Ответ: 3. Шесть — граница формулы, пять — граница опыта.

Прототип 2 — формула с корнем. Период малых колебаний маятника равен $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, где l — длина в метрах, $g = 9{,}8$ м/с², T измеряют в секундах. Найдите длину маятника, для которого период равен π секундам.

Делим формулу на 2π и получаем $\sqrt{l/9{,}8} = 1/2$. Обе части неотрицательны, поэтому возводим их в квадрат: $l/9{,}8 = 1/4$. Отсюда $l = 2{,}45$ м.

Ответ: 2,45.

Прототип 3 — логарифм в модели сигнала. На стенде амплитуда сигнала убывает. Если в начале затухания амплитуда равна A_0, то амплитуда A достигается через $t = 4 + 6\log_2(A_0/A)$ секунд после запуска стенда. Через 22 секунды амплитуда равна 1,75 мВ. Определите амплитуду в начале затухания в милливольтах.

Вычитаем четыре секунды задержки и делим на 6: $\log_2(A_0/1{,}75) = (22-4):6 = 3$. Тогда $A_0/1{,}75 = 2^3 = 8$, значит, $A_0 = 14$ мВ.

Ответ: 14.

Прототип 4 — наименьшее целое. В установке напряжение равно 24 В, а сила тока вычисляется по формуле $I = 24/(R + 1{,}5)$, где I — в амперах, R — в омах. Резистор выбирают с положительным целым сопротивлением. Какое наименьшее сопротивление можно взять, чтобы ток не превышал 4 А?

Знаменатель положителен. Из $24/(R+1{,}5) \le 4$ следует $24 \le 4R + 6$, значит, $R \ge 4{,}5$. Подходит $R = 5$. При $R = 4$ ток больше 4 А, поскольку $4 \cdot 5{,}5 = 22 < 24$.

Ответ: 5.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. До решения подпишите единицы и диапазон неизвестной величины.

1) После начала торможения поезд прошёл $s = 18t - 1{,}5t^2$ метров за t секунд. Модель применяется до полной остановки, когда $0 \le t \le 6$. Через сколько секунд после начала торможения поезд пройдёт 48 м?

2) Скорость тележки вычисляется по формуле $v = \sqrt{v_0^2 + 2\,a\,l}$, где $v_0 = 4$ м/с, ускорение $a = 3{,}5$ м/с², путь l — в метрах. Сколько метров пройдёт тележка, прежде чем разовьёт скорость 10 м/с?

3) В термокамере разность D между температурой внутри и температурой комнаты убывает. Время уменьшения с D_0 до D вычисляется по формуле $t = 8 \log_2\left(D_0 / D\right)$, где t — в минутах. Через сколько минут разность температур уменьшится с 40 °C до 5 °C?

4) Мощность установки с n подключёнными модулями равна $P = 30 + 12\,n$ ватт. Разрешена мощность не более 101 Вт. Какое наибольшее целое число модулей можно подключить?

5) После нагревания детали массой 600 г она получила 8100 Дж теплоты. Используйте формулу $Q = c\,m\,\Delta T$, где $c = 450$ Дж/(кг·°C), а масса m должна быть выражена в килограммах. На сколько градусов повысилась температура детали?

Задание 10 Движение и работа: режиссёрская версия

Упражнения к заданию №10

Что хотят. Перевести текстовую задачу в уравнение. Чаще всего речь о движении, производительности или смесях. Сюжет рассказывает, что происходит. Таблица удерживает числа на своих местах.

Классическая ловушка. «Прибыл на час раньше» означает, что прошло меньше времени, если старт был одновременным. Если один вышел позже или по дороге остановился, разность времени в пути придётся собрать из двух отрезков. Начните с вопроса «когда стартовал и когда приехал?».

Вредный совет. «Увидели двух персонажей? Вычитайте всегда в порядке появления. Первый назван в тексте первым, значит, его время и надо брать первым».

А теперь серьёзно. Назовите переменную и её допустимый диапазон. Для движения заполните столбцы «скорость, время, расстояние», для работы — «производительность, время, объём», для смеси — «масса смеси, доля вещества, масса вещества». Переводите минуты в доли часа до сравнения времён. В уравнении с дробями отдельно отметьте, почему их знаменатели положительны. Лампочка: подставьте ответ обратно и проверьте, что сходятся именно время прибытия, объём работы или концентрация, заданные в условии.

Карта темы

- **Расстояние одинаковое.** Время равно расстоянию, делённому на скорость. Учитывайте разницу времени старта и остановки.
- **Движение по воде.** По течению — собственная скорость плюс течение, против — собственная скорость минус течение.
- **Работа.** Время равно объёму, делённому на производительность. При совместной работе складываются производительности.
- **Смеси.** Масса вещества равна массе смеси, умноженной на долю. При добавлении или испарении чистой воды масса растворённого вещества сохраняется.
- **Разминка на прогрессию.** Если величина каждый раз меняется на одну и ту же сумму, выпишите первый член и разность.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — один маршрут, остановка у быстрого. Два велосипедиста одновременно отправились по маршруту длиной 72 км. Скорость первого во время движения на 6 км/ч выше скорости второго. Первый остановился на 12 минут и за счёт большей скорости всё равно приехал на 24 минуты раньше. Найдите скорость второго велосипедиста.

Пусть скорость второго равна $v>0$ км/ч. Второй затратил $72/v$ часа. Первый — $72/(v+6)+12/60$ часа. Отсюда

$$72/v-72/(v+6)=(12+24)/60=0{,}6.$$

Умножаем на положительное $v(v+6)$, получаем $v(v+6)=720$. Из $(v-24)(v+30)=0$ подходит $v=24$. Проверка: второй ехал 3 часа, первый двигался 2,4 часа и стоял 0,2 часа. Разность $3-2{,}6=0{,}4$ часа, то есть 24 минуты.

Ответ: 24.

Прототип 2 — более быстрый работник получил больше деталей. Второму мастеру поручили изготовить 144 детали, первому — 160. Мастера начали работу одновременно. Первый изготавливает на 8 деталей в час больше и закончил на полчаса раньше второго. Найдите производительность второго мастера.

Пусть второй делает $v>0$ деталей в час, первый — $v+8$.

Мастер	Деталей	Деталей в час	Время, ч
Первый	160	$v+8$	$160/(v+8)$
Второй	144	v	$144/v$

По условию $144/v-160/(v+8)=1/2$. После умножения на $2v(v+8)>0$ получаем $v^2+40v-2304=0$ и $(v-32)(v+72)=0$. Подходит $v=32$. Первый сделал свою часть за $160:40=4$ часа, второй — за $144:32=4{,}5$ часа.

Ответ: 32.

Прототип 3 — две операции с одной смесью. Для сиропа смешивают 30%-й и 60%-й сахарные сиропы. Если в полученную смесь добавить 4 кг чистой воды, доля сахара станет 40%. Если вместо этого из исходной смеси выпарить 4 кг воды, доля сахара станет 60%. Сколько килограммов 30%-го сиропа взяли?

Пусть масса исходной смеси M кг. Масса сахара одинакова в обеих версиях, поэтому $0{,}4(M+4)=0{,}6(M-4)$. Отсюда $0{,}2M=4$ и $M=20$. Масса сахара равна $0{,}4\cdot 24=9{,}6$ кг. Если исходно взяли x кг 30%-го сиропа, то

$$0{,}3x+0{,}6(20-x)=9{,}6.$$

Следовательно, $x = 8$. Масса второго сиропа $20 - 8 = 12$ кг, обе массы положительны. Проверка: $0{,}3 \cdot 8 + 0{,}6 \cdot 12 = 9{,}6$.

Ответ: 8.

Прототип 4 — вниз и обратно. Катер прошёл 24 км по течению и вернулся обратно. На поездку ушло 5 часов без остановок, скорость течения — 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера.

При собственной скорости $v > 2$ катер идёт по течению со скоростью $v + 2$, против — $v - 2$. Поэтому $24/(v+2) + 24/(v-2) = 5$. Получаем $48v = 5(v^2 - 4)$, то есть $(v - 10)(5v + 2) = 0$. Подходит $v = 10$. Дорога заняла $24 : 12 + 24 : 8 = 2 + 3 = 5$ часов.

Ответ: 10.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Сначала нарисуйте маленькую таблицу или шкалу времени, а потом пишите уравнение.

1) Два автомобиля проехали по 150 км. Скорость первого на 20 км/ч больше скорости второго. Первый выехал на 30 минут позже второго, но приехал на 45 минут раньше. Найдите скорость второго автомобиля в км/ч.

2) Первый станок выполняет заказ за 10 часов, второй — за 15 часов. Первые два часа работал только первый станок, затем оба станка работали вместе до завершения заказа. Сколько часов прошло от начала работы до завершения заказа?

3) Имеется 300 г сплава с 16% меди. Сколько граммов сплава с 40% меди нужно добавить, чтобы в новом сплаве было 22% меди? Потерь при сплавлении нет.

4) Лодка прошла 36 км вниз по реке, а затем столько же вверх. Движение вниз заняло на час меньше, чем вверх. Скорость течения 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки в км/ч.

5) Разминка на прогрессию. За пять дней участница клуба решила 140 задач. Каждый следующий день она решала на четыре задачи больше, чем предыдущий. Сколько задач она решила в пятый день?

Задание 11 Опознание графиков — 3

Упражнения к заданию №11

Что хотят. На рисунке — график функции: прямая, парабола, гипербола, показательная, логарифм или корень. Нужно восстановить формулу и найти значение функции, её аргумент или координату пересечения с другим графиком. Третья серия франшизы опознаний: в ОГЭ узнавали параболу в лицо, на базе сверяли график с характеристикой, в профиле опознание доросло до допроса — у графика выясняют его коэффициенты.

Классическая ловушка. Точки между клетками. Формулу восстанавливают подстановкой точек с графика — и вся надёжность метода держится на том, чтобы считывать точные координаты по сетке или по отметкам. Точка «примерно на полклетки выше двух» даёт коэффициент «примерно», а «примерно» в формуле — это уверенно неверный ответ в бланке. Сначала проверьте цену деления каждой оси. Выбирайте отмеченные точки или пересечения с сеткой, координаты которых можно считать точно.

Вредный совет. «Бери точки, где график красиво изгибается, — они самые информативные. Подумаешь, координата вышла три с хвостиком: округлишь до трёх, математика — наука приближённая».

А теперь серьёзно. Алгоритм в три хода. Первый: опознать семейство по силуэту — прямая, парабола, гипербола, показательная, логарифм, корень; заодно снять с графика бесплатные знаки: направление ветвей, наклон, положение асимптот. Второй: используйте столько точных данных, сколько нужно для определения коэффициентов. Для прямой обычно нужны две точки, для параболы удобно взять вершину и ещё одну точку. Третий: подставьте нужный x, решите уравнение для заданного y или приравняйте формулы двух графиков. За пределы сетки график продлевает формула. Лампочка: найденную формулу прогоните через третий узел с картинки — если он не подошёл, система решена с опечаткой.

Карта темы

Шесть семейств — по силуэтам. В конце — задача, где два графика встречаются.

- **Прямая $kx + b$.** b — где пересекли ось y; $k = \Delta y/\Delta x$ с учётом масштаба осей. Обе величины часто читаются без всякой системы.
- **Парабола $ax^2 + bx + c$.** Вершина — главная информантка: удобнее работать в виде $a(x - m)^2 + n$. Ветви вверх — a положительно.

- **Гипербола.** Для k/x коэффициент k — произведение координат точки. Если вид функции задан как k/(x − m) + n, сначала снимите с графика или из условия положение асимптот x = m и y = n. Тогда k = (x − m)(y − n).
- **Показательная.** График a^x проходит через (0; 1). Если дан вид C·a^x, отношение значений в двух точках равно a в степени разности их абсцисс.
- **Логарифм.** График $\log_a x$ проходит через (1; 0). При a > 1 логарифм растёт, при 0 < a < 1 убывает. У множителя перед логарифмом тоже есть знак.
- **Корень k√x.** Точка с квадратным иксом — 1, 4, 9, 16 — выдаёт k мгновенно.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — прямая. На рисунке — график функции f(x) = kx + b, проходящий через точки (−1; −3) и (2; 3). Найдите f(−4).

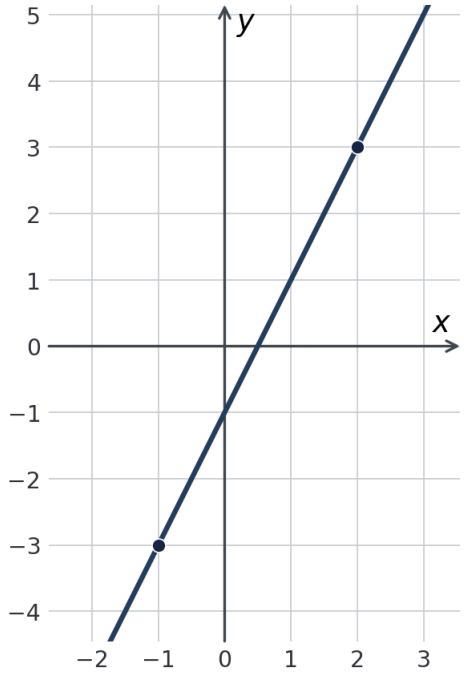


Рис. 11.1. Прямая на координатной сетке.

Шаг 1. Наклон: k = (3 − (−3)) : (2 − (−1)) = 6 : 3 = 2.

Шаг 2. b из точки (2; 3): 3 = 2 · 2 + b, значит b = −1.

Шаг 3. Проверка второй точкой: 2 · (−1) − 1 = −3. Узел подтверждает.

Шаг 4. Вопрос: f(−4) = 2 · (−4) − 1 = −9.

Ответ: −9.

Прототип 2 — парабола. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет вершину (1; −4) и проходит через точку (3; 0). Найдите f(−2).

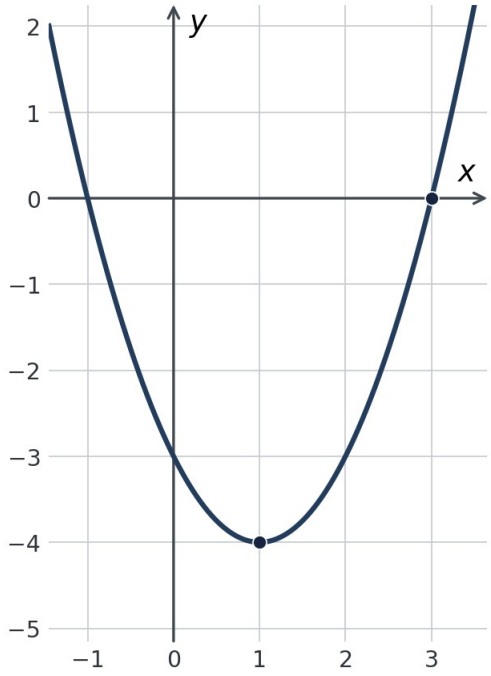


Рис. 11.2. Вершина параболы и ещё одна точка.

Шаг 1. Вершина зовёт удобный вид: $f(x) = a(x - 1)^2 - 4$.

Шаг 2. Точка (3; 0): $a \cdot 4 - 4 = 0$, значит $a = 1$.

Шаг 3. Формула собрана: $f(x) = (x - 1)^2 - 4$.

Шаг 4. Вопрос: $f(-2) = 9 - 4 = 5$.

Ответ: 5.

Прототип 3 — гипербола. График функции $f(x) = k/x$ проходит через точку (2; 3). Найдите $f(-6)$.

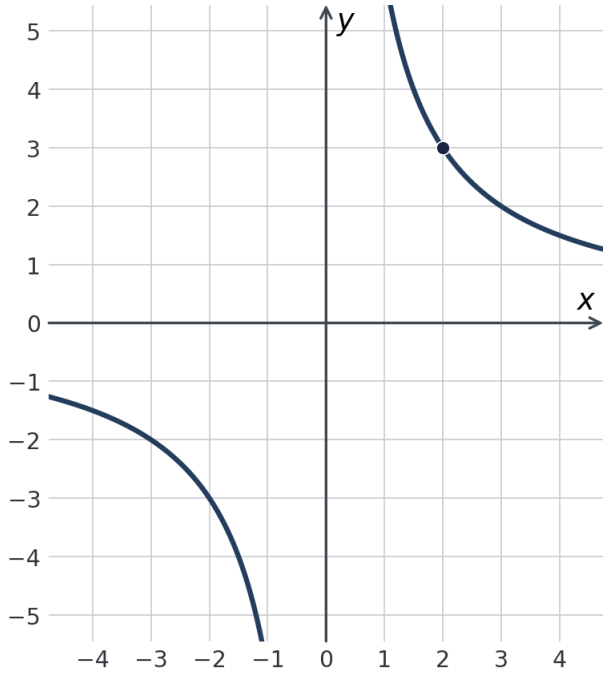


Рис. 11.3. Гипербола на координатной сетке.

Шаг 1. k — произведение координат: k = 2 · 3 = 6.

Шаг 2. f(−6) = 6 : (−6) = −1.

Ответ: −1.

Прототип 4 — показательная. График функции f(x) = a^x проходит через точку (2; 9). Найдите f(4).

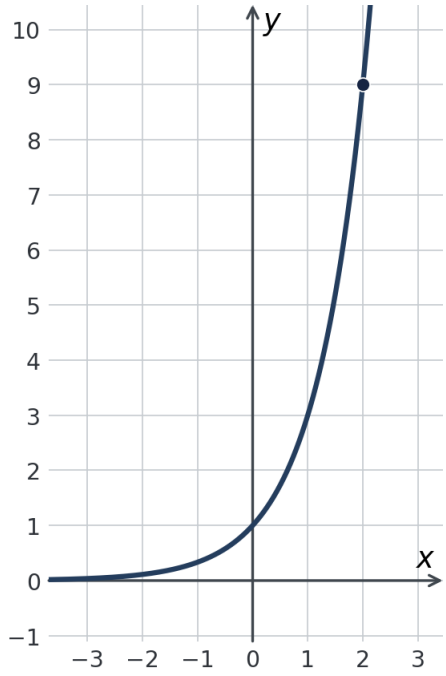


Рис. 11.4. Показательная функция на координатной сетке.

Шаг 1. $a^2 = 9$, основание положительно: a = 3.

Шаг 2. $f(4) = 3^4 = 81$.

Ответ: 81.

Прототип 5 — две встречи, одна за кадром. На рисунке 11.5 изображены парабола $y = f(x)$ с вершиной V и прямая $y = g(x)$. Точка A — одно из их пересечений. Найдите ординату второй точки пересечения.

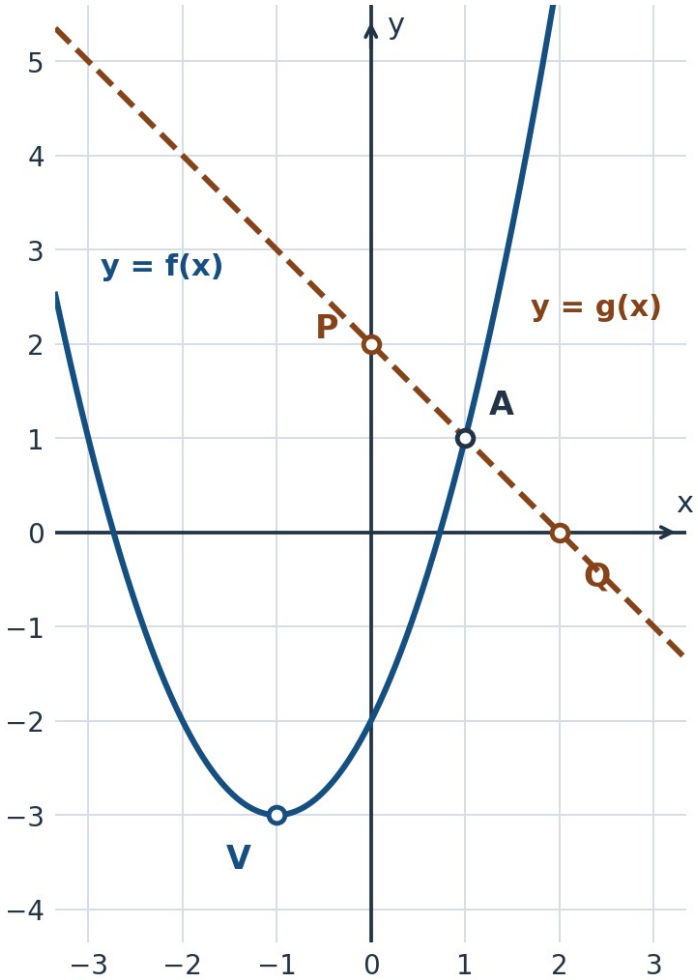


Рис. 11.5. Второе пересечение понадобится вычислить.

Шаг 1. Вершина $V(-1; -3)$, поэтому $f(x) = a(x + 1)^2 - 3$. По точке $A(1; 1)$ имеем $1 = 4a - 3$, откуда $a = 1$.

Шаг 2. На прямой отмечены $P(0; 2)$ и $Q(2; 0)$. Её наклон равен -1, поэтому $g(x) = 2 - x$.

Шаг 3. В пересечении ординаты равны: $(x + 1)^2 - 3 = 2 - x$, или $x^2 + 3x - 4 = 0$. Один корень $x = 1$ уже отмечен. Второй равен -4, что также видно из разложения $(x - 1)(x + 4) = 0$.

Шаг 4. Спрашивают ординату. Подставляем $x = -4$ в формулу прямой: $2 - (-4) = 6$.

Ответ: 6.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Сначала отметьте, что ищете: абсциссу, ординату или значение функции.

1) Значения линейной функции в точках $x = -2$ и $x = 4$ равны 6 и -3 соответственно. При каком x её значение равно -6?

2) На рисунке 11.6 изображена парабола с вершиной $(-2;\,1)$, проходящая через $(0;\,5)$. При каком $x > -2$ значение этой функции равно 10?

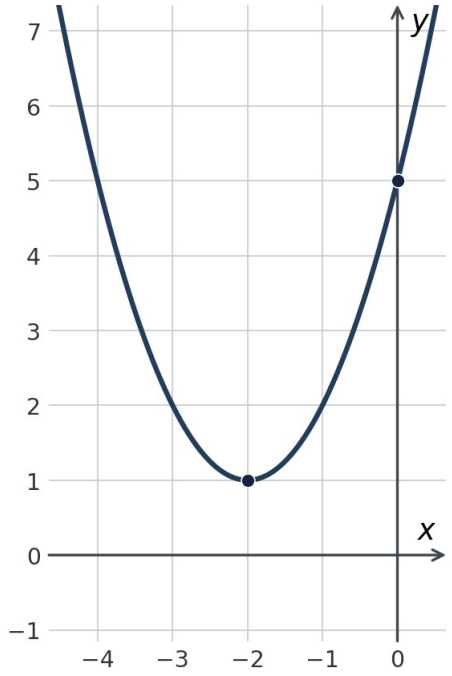


Рис. 11.6. Парабола для самостоятельной работы.

3) Точка $(-1;\,5)$ лежит на гиперболе $y = \frac{k}{x-2} + 1$. Какое значение принимает эта функция при $x = 6$?

4) Для функции $f(x) = C \cdot a^x$, где $C > 0$ и $a > 0$, известно, что $f(1) = 12$ и $f(3) = 3$. Вычислите $f(5)$.

5) На графике $f(x) = 2\log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, лежит точка $(4;\,-4)$. Найдите $f(8)$.

6) Гипербола $y = \frac{k}{x-1} - 1$ и прямая $y = x - 1$ пересекаются в точке $A(4;\,3)$. Найдите абсциссу другой точки пересечения.

Задание 12 Максимум пользы, минимум паники

Упражнения к заданию №12

Что хотят. Найти точку максимума или минимума функции — либо её наибольшее или наименьшее значение на отрезке. Последнее задание первой части. Здесь часто надо вычислить производную, проверить её знаки и решить, что записать в ответ. Алгоритм короче, чем страх перед ним.

Классическая ловушка. Точка против значения. «Точка минимума» — это x, место на оси. «Наименьшее значение» — это y, высота. Решение доведено до конца, производная найдена, нули расставлены — и в бланк уходит икс вместо игрека или игрек вместо икса. Лечение дешёвое: прочитав вопрос, обвести в нём слово «точка» или слово «значение» — и в конце решения свериться с обведённым.

Вредный совет. «Нашёл, где производная равна нулю, — пиши смело, это и есть ответ. Точка, значение — бюрократия. Математика едина, а икс с игреком — почти одна буква, экзаменатор поймёт».

А теперь серьёзно. Найдите внутренние точки области определения, где производная равна нулю или не существует. Затем проверьте знаки производной по сторонам от каждой точки. Если функция в этой точке непрерывна, смена знака с плюса на минус даёт максимум, с минуса на плюс — минимум. Для поиска наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на замкнутом отрезке проверьте оба конца и критические точки строго внутри отрезка. К ним относятся и острые точки, где производная не существует. Сравните значения исходной функции во всех кандидатах. И две лампочки. Первая — обведённое слово из ловушки. Вторая: значение функции в финалисте пересчитайте дважды — подстановка в исходную формулу любит терять минусы.

Карта темы

Пять семейств — по виду функции; алгоритм у всех общий, различается только техника дифференцирования.

- **Многочлены.** У многочлена третьей степени производная — квадратный трёхчлен. Его нули можно искать через дискриминант или теорему Виета. Сначала проверьте, как изменился знак производной.
- **С экспонентой.** В произведении многочлена на экспоненту примените правило произведения. Вынесите положительную экспоненту, чтобы читать знак по оставшимся множителям.

- **С логарифмом.** Не забыть область определения: кандидаты вне её — не кандидаты. Производная логарифма — дробь, нуль ищется у числителя приведённого выражения.
- **С корнем.** Начните с области определения. Если функция целиком имеет вид $\sqrt{g(x)}$, сравнивайте $g(x)$ на допустимых x: квадратный корень сохраняет порядок. Если рядом есть другие слагаемые, исследуйте всю функцию.
- **С дробью.** Точки, где знаменатель равен нулю, разделяют область определения. Отмечайте их на схеме знаков и проверяйте экстремумы только в допустимых точках.
- **Тригонометрические.** Если производная обращается в ноль периодически, оставьте только критические точки указанного отрезка и проверьте его концы.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — наименьшее значение на отрезке. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$.

Шаг 1. Производная: $y' = 3x^2 - 12$.

Шаг 2. Нули: $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. В отрезок попадает только 2.

Шаг 3. Кандидаты: концы 0 и 3, критическая точка 2.

Шаг 4. Значения: $y(0) = 7$; $y(2) = 8 - 24 + 7 = -9$; $y(3) = 27 - 36 + 7 = -2$.

Шаг 5. Вопрос про значение — сверяемся с обведённым словом: наименьшее из трёх чисел — это −9.

Ответ: −9.

Прототип 2 — точка максимума. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 27x$.

Шаг 1. Производная: $y' = 3x^2 - 27$, нули $x = \pm 3$.

Шаг 2. Знаки: при $x < -3$ производная положительна, между −3 и 3 отрицательна, после 3 снова положительна.

Шаг 3. Смена «плюс — минус» в точке −3: там максимум. В точке 3 смена обратная — там минимум, его не спрашивали.

Шаг 4. Вопрос про точку: в бланк идёт икс.

Ответ: −3.

Прототип 3 — экспонента и две критические точки. У функции $y = (x + 1)^2 e^{(-2x)}$ есть точка локального максимума. Найдите её абсциссу.

Шаг 1. Правило произведения даёт $y' = 2(x + 1)e^{(-2x)} - 2(x + 1)^2 e^{(-2x)} = -2x(x + 1)e^{(-2x)}$.

Шаг 2. Экспонента положительна. Производная отрицательна при $x < -1$, положительна при $-1 < x < 0$ и снова отрицательна при $x > 0$.

Шаг 3. Слева от 0 функция растёт, справа убывает. В точке −1 наоборот, там минимум.

Ответ: 0.

Прототип 4 — корень. Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.

Шаг 1. Записываем $x\sqrt{x}$ степенью: $x^{(3/2)}$. Производная: $y' = 1{,}5\sqrt{x} - 3$.

Шаг 2. Нуль: $\sqrt{x} = 2$, то есть $x = 4$. Лежит в отрезке.

Шаг 3. Кандидаты: 1, 4, 9. Значения: $y(1) = 1 - 3 + 1 = -1$; $y(4) = 8 - 12 + 1 = -3$; $y(9) = 27 - 27 + 1 = 1$.

Шаг 4. Наименьшее значение — минус три; и это игрек, как и просили.

Ответ: −3.

Прототип 5 — логарифм и область определения. При каком x функция $y = 5\ln(2x - 1) - 2x$ достигает локального максимума?

Шаг 1. Логарифм существует при $2x - 1 > 0$, то есть $x > 0{,}5$.

Шаг 2. $y' = 10/(2x - 1) - 2$. Приравняем к нулю: $2x - 1 = 5$, откуда $x = 3$.

Шаг 3. На области определения знаменатель положителен. Производная положительна до 3 и отрицательна после, значит, это точка максимума.

Ответ: 3.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Первое действие — обвести в вопросе слово «точка» или слово «значение»; последнее — свериться с ним.

1) У функции $y = (x - 1)^3 - 12(x - 1) + 4$ сравните значения в нужных точках отрезка $[-1; 4]$. Какое значение наименьшее?

2) У графика $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$ отмечают точку локального минимума. Какова её абсцисса?

3) Найдите абсциссу точки локального максимума функции $y = (x - 7)^2 e^{(2x)}$.

4) Какое наибольшее значение принимает функция $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ на отрезке $[0; 1]$?

5) Найдите точку локального минимума функции $y = 3x - 6\ln(2x + 5)$. В ответ запишите её абсциссу.

6) На отрезке $[0; 9]$ задана функция $y = 2\sqrt{x} - x + 5$. Найдите её наименьшее значение.

7) Найдите абсциссу точки локального минимума функции $y = 27/(x + 4) + 3x - 5$.

Задание 13 Тригонометрия просит развёрнутый ответ

Упражнения к заданию №13

Что хотят. В пункте **а)** решите уравнение на всей его области определения. В пункте **б)** оставьте только те корни, которые попали на заданный отрезок. Задание двухэтажное. На первом этаже живут все корни, на втором — гости с приглашением.

Прейскурант эксперта. В демоверсии ФИПИ-2027 за полное обоснованное решение обоих пунктов дают два первичных балла. Один балл предусмотрен за обоснованно верный пункт **а)**. Ещё один случай на один балл — вычислительная ошибка при верной последовательности шагов в обоих пунктах. Смена переменной, число серий и способ отбора зависят от уравнения. Пусть из записи будет понятно, откуда взялись все корни и почему на отрезке остаются именно выписанные значения. Демоверсия и критерии

Классическая ловушка. Увидели $\cos x$ в двух слагаемых и сократили. А при $\cos x = 0$ оба слагаемых могли обратиться в ноль одновременно. Вынесите множитель за скобки и рассмотрите оба случая. Если косинус стоял **в знаменателе** исходного уравнения, его нули уже исключены областью определения.

Вредный совет. «Выпиши один угол с окружности. Эксперт сам догадается про остальные обороты, он же эксперт».

А теперь серьёзно. Сначала запишите ОДЗ, если её задают знаменатель, логарифм, корень или тангенс. Затем приведите выражение к знакомому виду и выпишите **все** решения. В конце подставьте общие формулы в неравенство с границами отрезка и найдите допустимые целые значения параметра. Квадратные скобки означают, что обе границы входят. Если на рисунке одна точка окружности соответствует нескольким оборотам, укажите, какие значения угла из этих оборотов подходят.

Карта темы

- **Замена.** Если всё выражается через одну функцию, положите $t = \sin x$ или $t = \cos x$ и запишите $-1 \le t \le 1$.
- **Произведение.** Вынесите общий множитель и приравняйте к нулю каждый множитель. Если в исходном условии есть дробь, держите рядом её ОДЗ.

- **Однородное уравнение.** Проверьте случай $\cos x = 0$ прямо в исходном уравнении. При $\cos x \neq 0$ разделите на нужную степень косинуса и перейдите к $\tan x$.
- **Формулы.** Двойной угол, формулы сложения и приведения помогают собрать несколько выражений в одно. Загляните в главу 7, если формула вылетела из головы.
- **Серии и отбор.** У $\sin x$ и $\cos x$ полный оборот — 2π, у $\tan x$ — π. У самого уравнения шаг серии может оказаться меньше полного оборота. Например, из $\sin(2x) = 0$ получаем $x = \pi k / 2$, а из $\cos x = 0$ — $x = \pi/2 + \pi k$. Везде $k \in \mathbb{Z}$.

Разбор основных прототипов

Прототип 1. Замена, два конца отрезка и один корень между ними

а) Найдите все действительные решения уравнения $\cos(2x) + 2\cos^2 x + 2\sin x = 1$.
б) Выпишите из найденных решений те, для которых $-5\pi/6 \le x \le \pi/2$.

Шаг 1. Пусть $t = \sin x$, тогда $-1 \le t \le 1$. Так как $\cos(2x) = 1 - 2t^2$ и $\cos^2 x = 1 - t^2$, получаем $3 - 4t^2 + 2t = 1$, откуда $2t^2 - t - 1 = 0$.

Шаг 2. Разложим $2t^2 - t - 1 = (t-1)(2t+1)$. Оба значения, $t = 1$ и $t = -1/2$, допустимы. У синуса на высоте 1 одна точка на окружности, на высоте $-1/2$ — две.

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\; x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\; x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Шаг 3. Подставим каждую серию в $-5\pi/6 \le x \le \pi/2$. Для первой получаем $-2/3 \le k \le 0$, для второй $-1/3 \le k \le 1/3$, для третьей $-1 \le k \le -1/3$. Целые значения k равны соответственно 0, 0 и -1.



Ответ. а) $x = \pi/2 + 2\pi k$, $x = -\pi/6 + 2\pi k$, $x = 7\pi/6 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **б)** $-5\pi/6$, $-\pi/6$, $\pi/2$.

Отбор удобно проверить на числовой прямой: подпишите оба конца заданного отрезка и отметьте найденные углы. Если корень совпал с границей замкнутого отрезка, включите его. По записи с целым параметром должно быть видно, что между отмеченными углами других корней нет.

Прототип 2. Множитель и двойной аргумент

а) Определите все значения x, при которых $2\cos x\sin(2x)+\cos x=0$.
б) Найдите корни в пределах $\pi\le x\le 5\pi/2$.

Шаг 1. Вынесем косинус за скобки. Из $\cos x\left(2\sin(2x)+1\right)=0$ получаем $\cos x=0$ или $\sin(2x)=-1/2$.

Шаг 2. Первый случай даёт $x=\pi/2+\pi k$. Во втором $2x=-\pi/6+2\pi k$ или $2x=7\pi/6+2\pi k$. Разделим на два **всю** формулу, в том числе период. Получаем $x=-\pi/12+\pi k$ или $x=7\pi/12+\pi k$. Всюду $k\in\mathbb{Z}$.

Шаг 3. Для первой серии подстановка в $\pi\le x\le 5\pi/2$ даёт $1/2\le k\le 2$, откуда $k=1,2$. Для второй $13/12\le k\le 31/12$, откуда $k=2$. Для третьей $5/12\le k\le 23/12$, откуда $k=1$.

Ответ. а) $x=\pi/2+\pi k$, $x=-\pi/12+\pi k$, $x=7\pi/12+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **б)** $3\pi/2$, $19\pi/12$, $23\pi/12$, $5\pi/2$.

Лампочка. В прототипе 1 вместо $x=7\pi/6+2\pi k$ можно написать $x=-5\pi/6+2\pi k$. Начала серий отличаются на 2π, поэтому множества решений одинаковы. Сравнивайте сами углы и шаг серии. Вид записи может отличаться.

Проверь себя

Сначала запишите решения пункта **а)**. Для пункта **б)** покажите границы для целого параметра, либо отметьте корни на окружности и укажите, какие обороты попали в отрезок. Ответы — в конце книги.

1. а) Для каких x выполняется равенство $\sqrt{3}\cos(x-\pi/6)+3/2\sin(x+\pi/2)=3\cos x-3/4$? **б)** Перечислите такие x, для которых $-8\pi/3\le x\le -17\pi/12$.

2. а) Найдите все решения равенства $\log_4(1-2\cos x)=3/2-\log_2(1-2\cos x)$. **б)** Укажите решения в пределах $7\pi/6\le x\le 10\pi/3$.

3. а) Определите, при каких x дробь $\dfrac{2\cos(2x)+\cos x+2}{\cos x}$ определена и равна $1-2\sqrt{3}$. **б)** Выпишите такие значения, для которых $-19\pi/6\le x\le -\pi/2$.

4. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin(2x)+3\sin^2 x=3\cos^2 x$. **б)** Выберите из его корней все значения, для которых $-4\pi/3\le x\le \pi/6$.

Тренажёры. Тригонометрическое уравнение и отбор корней по шагам · Экзаменационные задачи №13 · Проверь как эксперт

Задание 14 Сечение имеет значение

Упражнения к заданию №14

Что хотят. В пункте а нужно доказать геометрический факт, в пункте б — найти расстояние, угол, площадь, объём или отношение. Иногда доказанное в а открывает короткий ход в б. Бывает, что пункт б требует другого метода.

Прейскурант эксперта. Полное правильное решение даёт три первичных балла. В каждом пункте покажите ход рассуждения и обоснуйте нужные равенства. Частичный балл зависит от критериев конкретной задачи.

Классическая ловушка. «Видно из чертежа». Чертёж помогает выбрать две нужные прямые, теорема доказывает оставшееся. Например, в признаке перпендикулярности прямой и плоскости важны две **пересекающиеся** прямые этой плоскости. Назовите их и проверьте каждую перпендикулярность.

Вредный совет. «Начерти покрупнее — хороший чертёж сам всё доказывает. Напиши „из рисунка видно“ и переходи к вычислениям».

А теперь серьёзно. Для расстояния от точки до плоскости ищите перпендикуляр или используйте объём пирамиды. Если точка — её вершина, а основание площади S лежит в плоскости, то расстояние $d = 3V/S$. Для угла между прямой и плоскостью сначала постройте ортогональную проекцию прямой на плоскость. Для двугранного угла проведите в двух гранях прямые, перпендикулярные общему ребру в одной точке. Лампочка перед ответом — сравните расстояние с длиной отрезка из данной точки до любой известной точки плоскости.

На чертеже сначала отметьте то, что дано. Скрытые рёбра проведите пунктиром. В решении подпишите новую точку и скажите, зачем она появилась. Например, проекция превращает пространственный угол в угол между двумя отрезками на рисунке.

Карта темы

- **Перпендикулярность.** Признак для прямой и плоскости требует двух пересекающихся прямых в плоскости. Для перпендикулярности двух плоскостей достаточно найти в одной прямую, перпендикулярную другой.
- **Параллельность.** Средняя линия даёт параллельную прямую. Для сечений параллельных граней одной плоскостью полезно рассмотреть линии пересечения этих граней с плоскостью сечения.

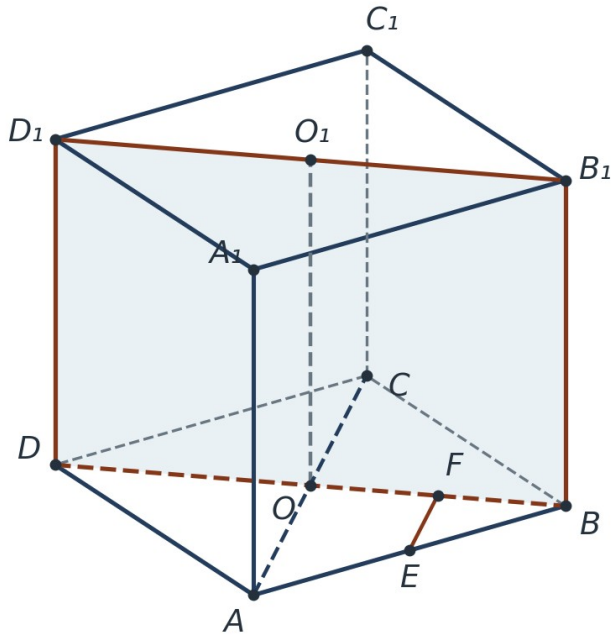
- **Расстояния.** От точки до плоскости — перпендикуляр из этой точки или метод объёмов. Если прямая параллельна плоскости, можно взять любую точку прямой.
- **Углы.** Найдите линейный угол двугранного угла в подходящем сечении. Затем решайте плоский треугольник.
- **Объёмы частей.** Объёмы тетраэдров с общей вершиной удобно сравнивать по трём выходящим из неё рёбрам. Если направления совпадают попарно, перемножьте три отношения длин. Это следует из формулы объёма тетраэдра через определитель или из последовательного применения формулы для пирамид с общим основанием.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — перпендикуляр и средняя линия. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 8. Точка E — середина AB.

а) Докажите, что прямая AC перпендикулярна плоскости BB_1D_1D.

б) Найдите расстояние от E до этой плоскости.



а) Пусть O — точка пересечения AC и BD, а O_1 — точка пересечения диагоналей верхней грани. Прямые BD и OO_1 лежат в плоскости BB_1D_1D и пересекаются в O. Диагонали квадрата перпендикулярны, поэтому $AC \perp BD$. Отрезок OO_1 параллелен боковым рёбрам и перпендикулярен плоскости основания. Значит, $AC \perp OO_1$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (BB_1D_1D)$.

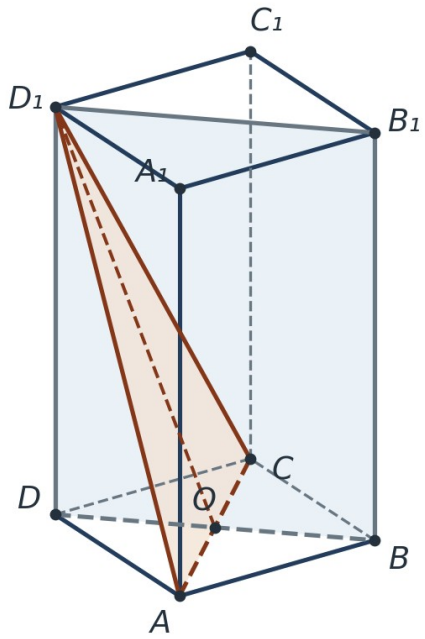
б) Обозначим через F середину BO. В треугольнике ABO отрезок EF — средняя линия, поэтому EF ∥ AO и EF = AO/2. Точка F лежит в плоскости BB_1D_1D. По пункту а прямая EF перпендикулярна этой плоскости, поэтому расстояние равно длине EF. Диагональ AC = 8√2, значит, AO = 4√2 и EF = 2√2.

Ответ: б) 2√2.

Прототип 2 — перпендикулярные плоскости и метод объёмов. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ основание ABCD — квадрат со стороной 4, высота DD_1 равна 8.

а) Докажите, что плоскости ACD_1 и BB_1D_1D перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от D до плоскости ACD_1.



а) Пусть O и O_1 — центры нижней и верхней граней. Как и в первом разборе, AC ⊥ BD и AC ⊥ OO_1. Прямые BD и OO_1 пересекаются и лежат в плоскости BB_1D_1D, значит, AC перпендикулярна этой плоскости. Прямая AC лежит в плоскости ACD_1. Плоскость, содержащая перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна ей.

б) Рассмотрим тетраэдр $DACD_1$. Треугольник ADC занимает половину основания параллелепипеда, поэтому его площадь равна 8, а высота тетраэдра из D_1 равна 8. Объём V = 8 · 8 : 3 = 64/3.

Площадь треугольника ACD_1 считаем по основанию AC и высоте D_1O. Отрезок D_1O лежит в плоскости BB_1D_1D и проходит через O. Из пункта а следует, что AC ⊥ D_1O. Получаем DO = 2√2 и D_1O = √(8 + 64) = 6√2. Тогда $S(ACD_1)$ = 4√2 · 6√2 : 2 = 24.

Пусть d — высота тетраэдра из D. Получаем d = 3V/$S(ACD_1)$ = 64 : 24 = 8/3.

Ответ: б) 8/3.

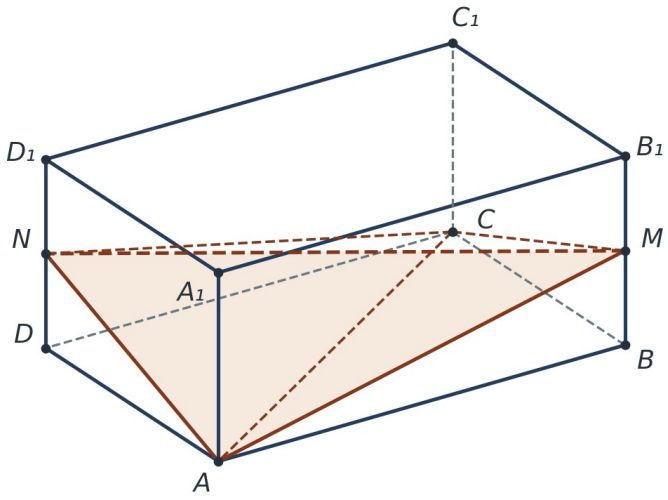
Проверь себя

Ответы к пункту б — в конце книги. Обоснования можно сверить с приложением.

1) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер BB_1 и DD_1 соответственно.

а) Докажите, что $MN \parallel BD$.

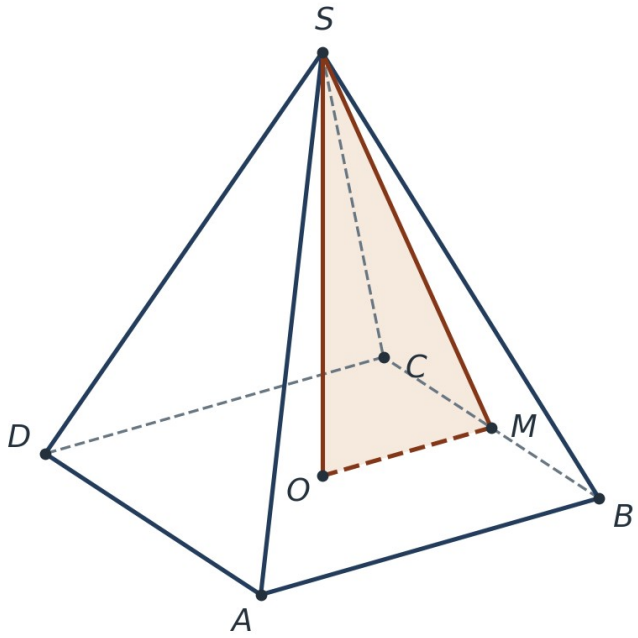
б) Найдите объём тетраэдра AMNC, если $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 4$.



2) В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка O — центр основания, M — середина BC. Сторона основания равна 10, высота SO равна 12.

а) Докажите, что $\angle SMO$ является линейным углом двугранного угла при ребре BC между гранью SBC и основанием.

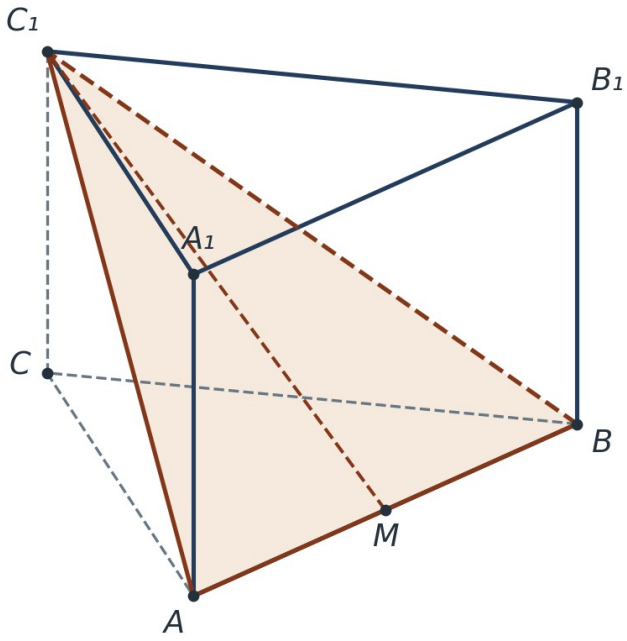
б) Найдите косинус этого угла.



3) В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро — 4. Точка M — середина AB.

а) Докажите, что $C_1M \perp AB$.

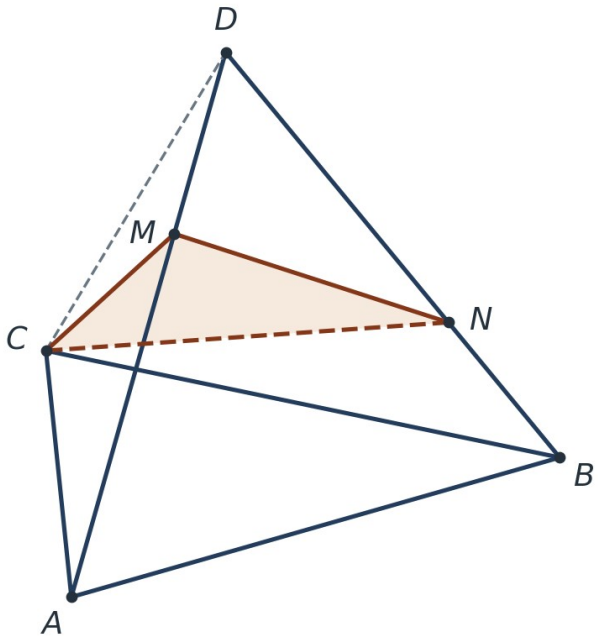
б) Найдите площадь треугольника ABC_1.



4) В правильном тетраэдре ABCD ребро равно 12. Точка M лежит на DA, DM = DA/3. Точка N лежит на DB, DN = 2DB/3.

а) Докажите, что плоскость CMN делит тетраэдр на части, объёмы которых относятся как 2 : 7.

б) Найдите расстояние от точки N до плоскости ACD.



Задание 15 Строго или нестрого

Упражнения к заданию №15

Что хотят. Решить неравенство и обосновать, какие числа вошли в ответ. Во второй части важно показать переходы, а затем точно записать множество. У него могут быть промежутки, открытые концы и одиночные значения. Одна точка иногда ведёт себя самостоятельнее целого промежутка.

Прейскурант эксперта. Максимум — два первичных балла за обоснованно верное решение. Возможность получить один балл зависит от критериев конкретной задачи. В двух примерах демоверсии ФИПИ-2027 отдельно названы пропуск определённой границы или изолированной точки и вычислительная ошибка при верной последовательности шагов. Записывайте ограничения и решение так, чтобы можно было проверить каждую границу. Демоверсия и критерии

Классическая ловушка. Умножить обе части на знаменатель с иксом, словно он везде положительный. Если он отрицателен, знак надо обратить. Если он равен нулю, выражение не определено. Ещё одна ловушка — основание между нулём и единицей. Степени и логарифмы по такому основанию убывают. При переходе к сравнению показателей или аргументов знак разворачивается.

Вредный совет. «Умножь на знаменатель и сохрани знак. Ну не отрицательный же он в твоём варианте».

А теперь серьёзно. Начните с ОДЗ. Выберите преобразование или замену и запишите её ограничения. Если получилось выражение, сравниваемое с нулём, разложите его на множители и примените метод интервалов. При чётной кратности нуля знак по разные стороны не меняется. Проверьте границы поимённо. Ноль знаменателя всегда исключён. Ноль числителя при нестрогом знаке включается, если исходное выражение определено. Когда вернётесь из t к x, ещё раз проверьте направление неравенства.

Карта темы

- **Целые и дробно-рациональные.** Соберите выражения в одной части, примените метод интервалов. Сокращение может убрать множитель, а запрет на его ноль остаётся.
- **Показательные.** Запишите степени по одному основанию и используйте $t = a^x > 0$. Возвращая x, учтите, как ведёт себя функция при этом основании.

- **Логарифмические.** Запишите все ограничения на аргументы и основания. При переменном основании отдельно рассмотрите $0<a<1$ и $a>1$.
- **Комбинированные.** Ищите общую замену в нескольких выражениях. Во вложенном логарифме положительным должен быть и аргумент внутреннего логарифма, и результат, который попадёт в наружный. Если появляется корень, проверьте знак подкоренного выражения и все исходные знаменатели.

Разбор основных прототипов

Прототип 1. Сокращение и одинокий корень

При каких действительных x дробь $\dfrac{(x+4)(x-3)^2}{(x+4)(x-1)}$ определена и не положительна?

Шаг 1. ОДЗ $x\neq -4$, $x\neq 1$. На ней сокращаем $x+4$ и сравниваем $(x-3)^2/(x-1)$ с нулём.

Шаг 2. При $x\neq 3$ квадрат положителен. Поэтому знак дроби совпадает со знаком $x-1$. Для $x<1$ она отрицательна, кроме выколотого -4, а при $x>1$, $x\neq 3$, положительна.

Шаг 3. При $x=3$ дробь определена и равна нулю. Знак нестрогий, значит эта точка входит отдельно. Точки -4 и 1 исключены исходным знаменателем.

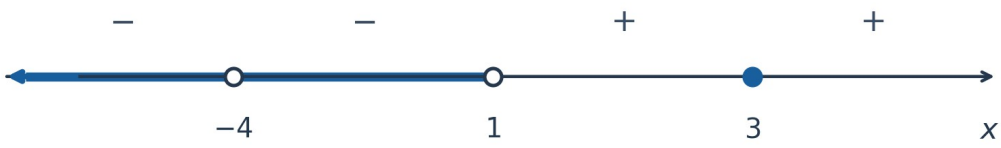


Рис. 15.1. Схема знаков. Точки расположены в порядке возрастания.

Ответ. $x<-4$ или $-4<x<1$ или $x=3$.

Прототип 2. Убывающий логарифм

Для каких x верно $\log_{1/2}(2x+5)\geq -3$?

Шаг 1. Аргумент положителен, поэтому $2x+5>0$.

Шаг 2. Правая часть равна $\log_{1/2}8$. Логарифм убывает, следовательно, $2x+5\leq 8$.

Шаг 3. Из $0<2x+5\leq 8$ получаем $-5/2<x\leq 3/2$. В левой границе аргумент равен нулю. В правой исходное неравенство становится равенством.

Ответ. $-5/2<x\leq 3/2$.

Прототип 3. Обратный переход к показателям

Найдите все x, для которых $(1/4)^x-6(1/2)^x+8\leq 0$.

Шаг 1. Положим $t=(1/2)^x>0$. Тогда $(1/4)^x=t^2$. Получаем $t^2-6t+8=(t-2)(t-4)\leq 0$.

Шаг 2. Подходят $2 \le t \le 4$. Обе границы положительны.

Шаг 3. Функция $(1/2)^x$ убывает. Так как $2 = (1/2)^{-1}$ и $4 = (1/2)^{-2}$, имеем $-2 \le x \le -1$.

Ответ. $-2 \le x \le -1$.

Прототип 4. Логарифм внутри логарифма

Решите неравенство $\left(\log_2(x+2)\right)^2 + 3 \le 4 \cdot 3^{\log_3(\log_2(x+2))}$.

Шаг 1. Внутренний логарифм должен существовать и быть положительным. Это даёт $x+2>1$, то есть $x>-1$.

Шаг 2. Пусть $t = \log_2(x+2) > 0$. На ОДЗ выражение $3^{\log_3 t}$ равно t. Теперь $t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) \le 0$.

Шаг 3. Подходят $1 \le t \le 3$. По возрастанию логарифма получаем $2 \le x+2 \le 8$, или $0 \le x \le 6$. Обе границы принадлежат ОДЗ.

Ответ. $0 \le x \le 6$.

Прототип 5. Степени превращаются в дроби

Найдите область решений неравенства $\dfrac{4^x - 8}{4^x - 4} + \dfrac{4^x - 8}{2(4^x - 1)} \ge 0$.

Шаг 1. Пусть $t = 4^x$. Тогда $t>0$, $t \ne 1$, $t \ne 4$.

Шаг 2. На ОДЗ приведём к общему знаменателю. Числитель равен $(t-8)(2(t-1)+(t-4)) = 3(t-8)(t-2)$. Сравниваем с нулём дробь $\dfrac{3(t-8)(t-2)}{2(t-4)(t-1)}$.

Шаг 3. Границы идут в порядке $0<1<2<4<8$. Дробь положительна на промежутках $0<t<1$, $2<t<4$, $t>8$. Из нулей числителя берём 2 и 8, а 1 и 4 оставляем выколотыми.



Рис. 15.2. Схема знаков после замены. Рассматриваем только $t>0$.

Шаг 4. Функция 4^x возрастает. Из $t<1$, $2 \le t < 4$ и $t \ge 8$ соответственно получаем $x<0$, $1/2 \le x < 1$ или $x \ge 3/2$.

Ответ. $x<0$ или $1/2 \le x < 1$ или $x \ge 3/2$.

Проверь себя

Для каждого условия запишите ОДЗ, обоснуйте преобразования и проверьте границы. Полные решения — в приложении.

1. Укажите все x, при которых дробь $\dfrac{(x-2)(x+5)^2}{(x+3)(x-4)}$ отрицательна.

2. Решите неравенство $\log_{1/3}(x+3) \le \log_{1/3}(2x-1)$.

3. При каких x выражение $9^x + 2\cdot 3^x - 15$ положительно?

4. Найдите все решения неравенства $\dfrac{2^{\log_2(\log_3 x)} - 2}{\log_3 x - 1} \ge 1$.

5. При каких x выполняется $\dfrac{9^x - 1}{3^x - 1} \le \dfrac{6}{3^x}$?

6. Найдите значения x, для которых дробь $\dfrac{\sqrt{x+5} - 4}{(\sqrt{x+5} - 2)(x-11)}$ определена и неотрицательна.

7. Решите неравенство $\log_{x+2}(3x+5) \ge 1$.

Тренажёры. Метод интервалов · Курс неравенств · Упражнения к заданию 15

Задание 16 Кредит доверия



Упражнения к заданию №16

Что хотят. Построить экономическую модель и объяснить расчёт. У кредита есть календарь: в один день банк начисляет проценты, в другой поступает платёж, в третий проверяют остаток долга. Поменять эти дни местами на бумаге — почти как поменять их местами в договоре: сумма получится другая.

Прейскурант эксперта. В обоих образцах ФИПИ-2027 за обоснованный правильный ответ дают 2 первичных балла, за верно построенную математическую модель — 1. Чтобы модель было видно, назовите величины, распишите порядок начислений и платежей, покажите, как из условия получается конечное уравнение или сумма. При проверке конкретной работы действуют критерии к её заданию.

Классическая ловушка. «Каждый год уменьшается на одну и ту же сумму» — кто именно уменьшается? Если в условии сказано «долг», то постоянна разность остатков. Если сказано «одинаковые платежи», то постоянны выплаты, а остаток долга изменяется по другому закону. Одна строка таблицы обычно спасает от подмены.

Вредный совет. «Десять процентов в год на пять лет? Попросите калькулятор умножить десять на пять. Календарь нужен только затем, чтобы банк дописал мелкий шрифт».

А теперь серьёзно. Пусть B_{k-1} — остаток перед начислением процентов, r_k — ставка периода в долях единицы, P_k — платёж, а B_k — остаток после платежа. Порядок действий виден в равенстве $B_k=\left(1+r_k\right)B_{k-1}-P_k$. Если известны оба остатка, удобно считать $P_k=\left(B_{k-1}-B_k\right)+r_kB_{k-1}$. Первое слагаемое погашает часть долга, второе платит проценты. При полном погашении последний остаток равен нулю. Пишите рядом единицы денег и даты, особенно когда просят посчитать выплаты только за часть срока.

Карта темы

- **Остаток уменьшается равномерно.** Выпишите остатки, затем начисления на них. Если условие делит срок на этапы, шаг уменьшения или ставку для каждого этапа считайте отдельно.
- **Равные платежи.** Обозначьте общий платёж буквой и несколько раз примените одну формулу остатка. Уравнение даст условие полного погашения.

- **Часть срока.** Сначала восстановите календарь всего кредита. Затем сложите платежи за нужные месяцы. Первый день периода начисления и дата контроля остатка могут отличаться.
- **Вклад.** При капитализации проценты присоединяются к сумме. Пополнение между начислениями меняет базу следующих процентов.
- **Выручка и затраты.** В задачах про производство прибыль равна разности выручки и затрат. Уточните, выбирается объём непрерывно или целыми партиями.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — два этапа календаря. В октябре компания взяла кредит на пять лет в размере 960 тыс. рублей. В январе первых двух лет долг возрастает на 12%, в январе трёх следующих — на 6%. С февраля по сентябрь каждого года компания вносит один платёж. К октябрю второго года долг должен составить 480 тыс. рублей, к октябрю пятого — ноль. В пределах каждого из этих двух этапов октябрьский остаток уменьшается за год на одну и ту же сумму. На сколько тысяч рублей выплаты первых двух лет больше выплат последних трёх?

В первых двух годах основной долг уменьшается на $(960-480):2=240$ тыс. рублей за год. В следующих трёх — на $480:3=160$. За год начисление идёт на остаток, с которого этот год начинался. Вся таблица в тысячах рублей.

Год	Остаток до начисления	Начисленные проценты	Остаток после платежа	Платёж
1	960	115,2	720	355,2
2	720	86,4	480	326,4
3	480	28,8	320	188,8
4	320	19,2	160	179,2
5	160	9,6	0	169,6

За первые два года выплачено $355{,}2+326{,}4=681{,}6$, за три следующих — $188{,}8+179{,}2+169{,}6=537{,}6$. Разность составляет $681{,}6-537{,}6=144$.

Ответ: 144 тыс. рублей.

Прототип 2 — календарь и неизвестная ставка. 15 августа клиент взял 640 тыс. рублей на восемь месяцев. С сентября по апрель первого числа каждого месяца долг увеличивается на $p\%$ по сравнению с остатком на 15-е число прошлого месяца. Между первым и пятнадцатым числом клиент вносит один платёж. На 15-е число каждого следующего месяца остаток должен уменьшиться на одну и ту же сумму, к 15

апреля долг погашен. В феврале, марте и апреле вместе выплачено 264 тыс. рублей. Найдите p.

После каждого платежа основной долг уменьшается на $640:8=80$ тыс. рублей. К 15 января сделано пять платежей, так что остаток равен $640-5\cdot 80=240$. Перед начислениями в феврале, марте и апреле остатки равны 240, 160 и 80 тыс. рублей. За три месяца погашено $3\cdot 80=240$ тыс. основного долга. Проценты равны $264-240=24$ тыс. и начислены на суммы общей величиной $240+160+80=480$ тыс. Поэтому $480\cdot p/100=24$, откуда $p=5$. Проверка по месяцам: платежи равны 92, 88 и 84 тыс. Последний гасит остаток полностью.

Ответ: 5%.

Прототип 3 — равные платежи. Клиент взял 227 500 рублей на три года. В начале каждого года долг увеличивается на 20% от остатка, в конце года клиент вносит платёж. Три платежа одинаковы, третьим долг погашен. На сколько рублей общая сумма платежей больше суммы кредита?

Пусть каждый платёж равен P рублей. Остаток после первого платежа равен $1{,}2\cdot 227500-P$. После второго — $1{,}2^2\cdot 227500-(1{,}2+1)P$. После третьего он равен нулю:

$1{,}2^3\cdot 227500-(1{,}2^2+1{,}2+1)P=0$.

Следовательно, $3{,}64P=393120$ и $P=108000$. Остатки после трёх платежей — 165 000, 90 000 и 0 рублей соответственно. Общий платёж $3\cdot 108000=324000$ рублей. Переплата равна $324000-227500=96500$.

Ответ: 96 500 рублей. Если на промежуточной строке банк внезапно оказывается должен клиенту, возвращайтесь к порядку действий.

Прототип 4 — прибыль производства. Тип из открытого варианта ФИПИ прошлых лет. Печатный участок выпускает от 0 до 9 целых партий тетрадей в месяц. При выпуске x партий затраты равны $x^2+3x+18$ тыс. рублей. Каждую партию продают за 14 тыс. рублей, весь выпуск продаётся. Какова наибольшая возможная месячная прибыль в тысячах рублей?

Выручка равна $14x$. Прибыль $14x-(x^2+3x+18)=-x^2+11x-18=12{,}25-(x-5{,}5)^2$. При любом допустимом целом x квадрат расстояния до $5{,}5$ не меньше $0{,}25$. Ближайшие целые — 5 и 6, оба допустимы, при каждом прибыль равна $12{,}25-0{,}25=12$. Значит, оценка достигается.

Ответ: 12 тыс. рублей.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. До чисел подпишите, что в задаче происходит с остатком и что происходит с платежом.

1) Компания получила кредит в 750 тыс. рублей на пять лет. Ежегодно сначала начисляют проценты по единой постоянной ставке $p\,\%$, затем компания вносит платёж. После второго платежа остаток составляет 360 тыс. рублей, после пятого — ноль. В первые два года долг после платежа уменьшается на одинаковую сумму, в последние три — на другую одинаковую сумму. За все пять лет уплачено 912 тыс. рублей. Найдите годовую ставку.

2) Остаток по кредиту в 720 тыс. рублей после каждого из четырёх ежегодных платежей уменьшается на 180 тыс. рублей. В первые два года до платежа начисляют 15% от текущего долга, в последние два — 10%. Сколько тысяч рублей клиент выплатит в сумме?

3) Заём в 315 тыс. рублей погашается двумя равными ежегодными платежами. Перед каждым платежом долг увеличивается на 10%, после второго платежа остаток равен нулю. Сколько тысяч рублей останется выплатить по основному долгу после первого платежа?

4) На счёт положили 150 тыс. рублей. Через год банк начислил 12% и присоединил проценты к вкладу. В этот же день вкладчик добавил 30 тыс. рублей. Через второй год банк начислил 8% на весь остаток. Сколько тысяч рублей стало на счёте?

Тренажёр. Финансовая математика и схемы платежей · Экзаменационные упражнения №16.

Задание 17 Плоская компания требует доказательств

Упражнения к заданию №17

Что хотят. В пункте а нужно доказать утверждение о фигуре, в пункте б — найти угол, длину или площадь. У задачи есть несколько опорных свойств. Умение заметить их на рисунке экономит больше времени, чем беглый счёт.

Прейскурант эксперта. Полное верное решение даёт три первичных балла. Оформите доказательство и вычисление так, чтобы ход рассуждения в каждом пункте был понятен. Если используете результат пункта а, укажите где. Частичный балл зависит от критериев конкретной задачи.

Классическая ловушка. Доказательство частного случая. Трапеция на рисунке может выглядеть равнобедренной, а угол — прямым. Чтобы использовать такое свойство, выведите его из условия. Если числовые данные относятся только к пункту б, доказательство пункта а должно работать при всех допустимых данных.

Вредный совет. «Начерти с числами из пункта б — сразу видно, что доказывать. Углы получились по 40 градусов? Так и пиши: углы равны 40 градусам, что и требовалось».

А теперь серьёзно. Начните с того, что требуется доказать: для равенства углов ищите общую дугу, параллельность или подобные треугольники. Для равенства отрезков сравните два треугольника или вспомните о касательных из одной точки. В подобии следите за порядком вершин: он подсказывает, какие стороны сопоставить. Коэффициент подобия относится к длинам, его квадрат — к площадям. Лампочка — запишите свойство из пункта а отдельной строкой и отметьте, в каком месте оно пригодится в б.

Карта темы

- **Вписанные углы.** Опираются на одну и ту же дугу — равны. Опираются на диаметр — прямые. У противоположных углов вписанного выпуклого четырёхугольника сумма 180°.
- **Касательная.** Радиус в точку касания перпендикулярен касательной. Длины отрезков двух касательных из одной точки до точек касания равны.
- **Подобие.** Начните с двух пар равных углов. Соответствующие стороны образуют пропорцию, соответствующие площади относятся как квадрат коэффициента.

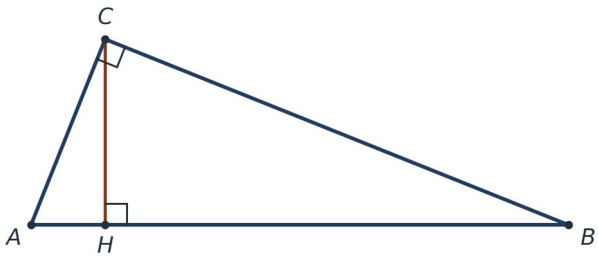
- **Биссектриса.** В треугольнике делит противоположную сторону в отношении прилежащих сторон. Центр окружности, касающейся обеих сторон угла и лежащей внутри него, расположен на биссектрисе.
- **Описанные четырёхугольники.** У четырёхугольника с вписанной окружностью суммы длин противоположных сторон равны. Равенство получается из пар касательных, проведённых из каждой вершины.
- **Площади.** При одной и той же высоте сравнивайте основания. При равных углах между двумя сторонами площади относятся как произведения этих сторон: общий множитель — половина синуса угла.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — высота к гипотенузе. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Высота CH проведена к гипотенузе AB.

а) Докажите, что $CH^2 = AH \cdot HB$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $AH = 4$, $HB = 25$.



а) В треугольниках AHC и CHB углы при H прямые. Угол HCB дополняет угол HBC до $90°$. Угол HAC тоже дополняет угол ABC до $90°$, а HBC и ABC совпадают. Значит, $\angle HAC = \angle HCB$. По двум углам треугольники AHC и CHB подобны. Соответствующие стороны дают $AH/CH = CH/HB$. Отсюда $CH^2 = AH \cdot HB$.

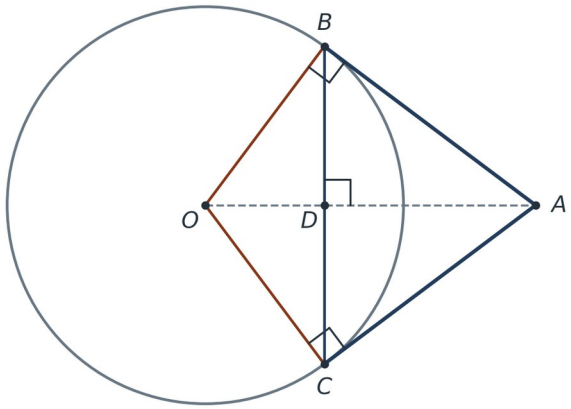
б) По доказанному $CH = \sqrt{(4 \cdot 25)} = 10$. Гипотенуза $AB = 4 + 25 = 29$. Площадь равна $AB \cdot CH/2 = 29 \cdot 10 : 2 = 145$.

Ответ: б) 145.

Прототип 2 — две касательные и хорда. Из внешней точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Точка D — пересечение AO и BC.

а) Докажите, что D — середина хорды BC.

б) Найдите длину хорды BC, если AO = 25, а радиус окружности равен 15.



а) Радиусы OB и OC перпендикулярны касательным AB и AC. Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по общей гипотенузе AO и равным радиусам OB и OC. Поэтому AB = AC. Точки A и O равноудалены от B и C, значит, прямая AO является серединным перпендикуляром к BC. Следовательно, точка D — середина BC.

б) BD — высота к гипотенузе OA в прямоугольном треугольнике OBA. По подобию треугольников ODB и OBA получаем $OD = OB^2/OA = 225/25 = 9$. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{(15^2 - 9^2)} = 12$. Хорда BC вдвое длиннее BD, поэтому BC = 24.

Ответ: б) 24.

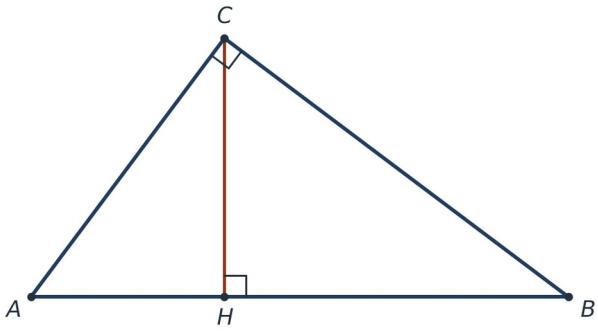
Проверь себя

Ответы к пункту б — в конце книги, доказательства — в приложении.

1) В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, H — основание высоты, проведённой из C.

а) Докажите, что треугольники AHC и CHB подобны.

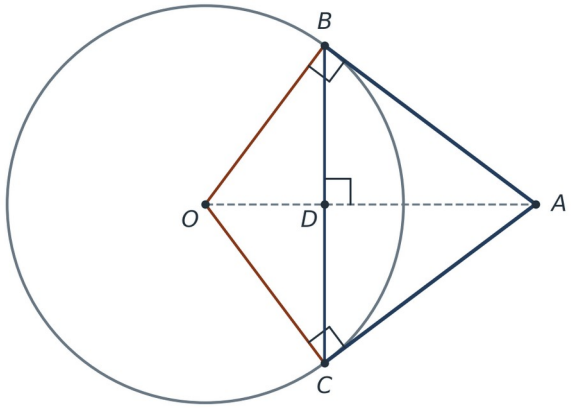
б) Найдите CH, если AC = 15 и BH = 16.



2) Из внешней точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Точка D — пересечение AO и BC.

а) Докажите, что треугольник ABD подобен треугольнику AOB.

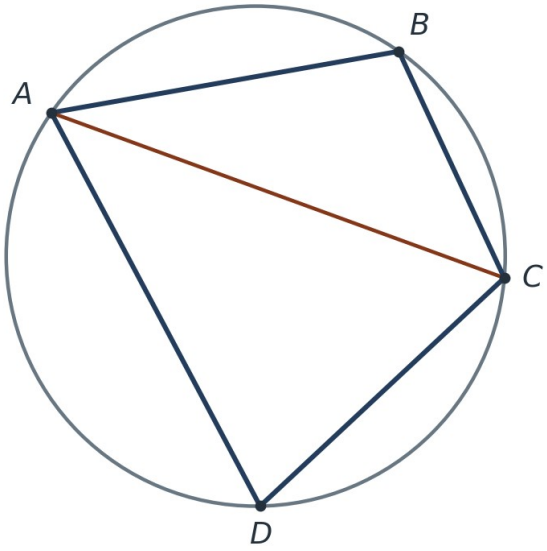
б) Найдите площадь треугольника ABC, если AO = 20, OC = 12.



3) Выпуклый четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол BAC равен 30°, угол CAD равен 42°.

а) Докажите, что ∠BAD + ∠BCD = 180°.

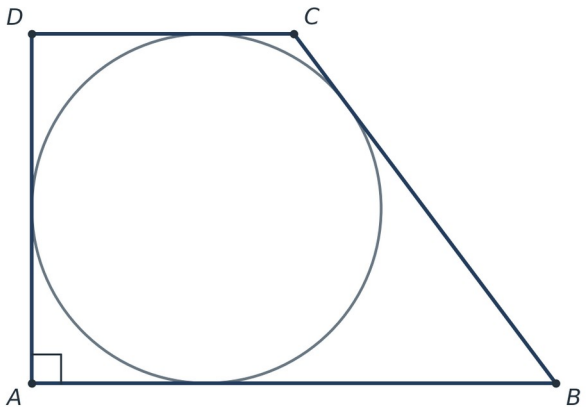
б) Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.



4) В трапецию ABCD с основаниями AB и CD вписана окружность. Боковая сторона AD перпендикулярна основаниям.

а) Докажите, что AB + CD = AD + BC.

б) Найдите площадь трапеции, если AB = 18, AD = 12 и BC = 15.



Задание 18 Одна задача про все задачи



Упражнения к заданию №18

Что хотят. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение или система ведёт себя заданным образом: столько-то решений, единственность, решения на отрезке. Четыре первичных балла — дороже не бывает. Параметр — это не «ещё одна буква», это ручка настройки: одно условие с параметром описывает бесконечное семейство обычных задач, и восемнадцатое спрашивает не «реши задачу», а «опиши, как устроено всё семейство». Отсюда и название главы.

Прейскурант эксперта. Полное обоснованное решение даёт четыре первичных балла. Критерии частичного балла зависят от конкретной задачи. Перечислите все случаи, отдельно проверьте граничные значения и объясните, почему других решений нет.

Классическая ловушка. Потерянный вырожденный случай. В уравнении $(a - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$ рука честно пишет дискриминант и работает с квадратным уравнением — а при $a = 1$ уравнение квадратным быть перестаёт: старший коэффициент обнулился, осталось линейное $2x - 1 = 0$ со своим законным единственным корнем. Дискриминант этого корня не видит — у линейных уравнений дискриминанта нет. В разборе ниже ровно половина ответа живёт в вырожденном случае; коэффициент при старшей степени, зависящий от параметра, — это развилка «ноль или не ноль», которую надо написать.

Вредный совет. «Параметр — та же буква, что икс, только из другого места алфавита. Пиши дискриминант и не разводи случаи: уравнение квадратное, я же вижу — вон у него икс в квадрате нарисован».

А теперь серьёзно. У восемнадцатого два рабочих языка, и сильное решение владеет обоими. Аналитический — дисциплина случаев: каждая развилка (ноль или нет, внутри ОДЗ или нет) проходится явно, ветви собираются в общий ответ. Графический — перевести уравнение или систему на язык пересечений. Отдельно проверьте, каким точкам пересечения соответствуют допустимые решения. Частный, но самый ходовой случай — фирменная переформулировка тренажёра: уравнение $f(x) = a$ — это вопрос про горизонталь. Постройте график f, двигайте горизонталь и фиксируйте перестройки — касание, прохождение через угловую точку, совпадение: для горизонтали и кусочно-монотонного графика между найденными уровнями число пересечений сохраняется. Сначала перечислите уровни вершин, закрытых и выколотых точек и границ области, если они влияют на счёт. Ответ может содержать

промежутки и отдельные числа, и каждая граница проверяется отдельно подстановкой конкретного a: даже если через открытые интервалы ответ уже читается. Итог оформляется словарём ответов — полной таблицей «диапазон a → число решений»: словарь избыточен ровно настолько, чтобы вопрос любой формулировки читался из него одной строкой.

Карта темы

Маршрут двухэтажный: сначала разберём методы, потом смешаем их в самостоятельных задачах. Полки линии:

- **Выразить параметр.** Уравнение приводится к виду $f(x) = a$ — и превращается в вопрос про горизонталь. Самый быстрый метод, когда a входит в уравнение «линейно и одиноко».
- **Семейство против неподвижной линии.** Параметр меняет положение или наклон одного графика. При подсчёте пересечений проверьте касание, прохождение через угловую точку и совпадение целой части графиков.
- **Аналитический разбор случаев.** Когда картинка не рисуется — дисциплина ветвлений: вырожденные коэффициенты, знаки, ОДЗ. Медленнее, зато всеяден.
- **Квадратные семейства.** Дискриминант плюс обязательная развилка старшего коэффициента — здесь прописана ловушка главы.
- **Дробные и иррациональные.** Новый вид границ: корень существует, но выколот ОДЗ; ветвь графика с корнем может начинаться на границе области определения. Перестройка «решение упёрлось в край области» встаёт в один ряд с касанием.

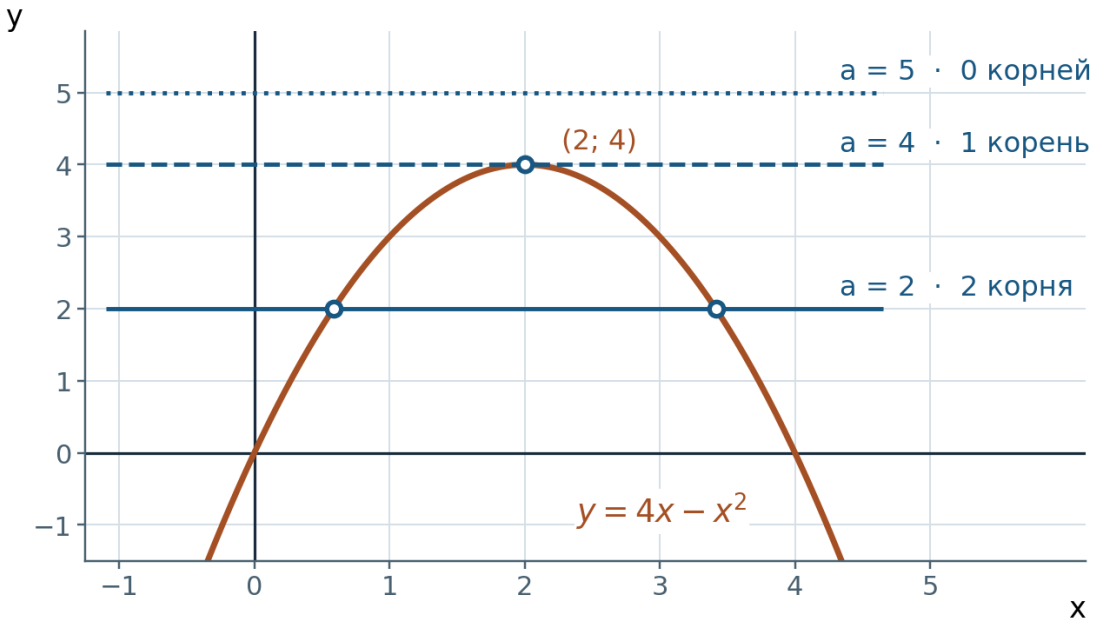
Разбор основных прототипов

Прототип 1 — один вопрос, два языка. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет два различных корня.

Шаг 1, язык первый. Дискриминант: $D = 16 - 4a$. Два различных корня — это $D > 0$, то есть $a < 4$.

Шаг 2, язык второй. Выражаем параметр: $a = 4x - x^2$. Справа — парабола ветвями вниз с вершиной в точке (2; 4); вопрос превратился в «при каких a горизонталь $y = a$ пересекает её дважды».

Шаг 3. Горизонталь ниже вершины — два пересечения; на высоте вершины — касание, одно; выше — ни одного. Два корня при $a < 4$.



Шаг 4. Граница подстановкой: при $a = 4$ уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$ даёт $(x - 2)^2 = 0$ — корень один, граница в ответ не входит.

Ответ: $a < 4$. Языки обязаны совпасть — и совпали; это и есть внутренняя проверка восемнадцатого.

Прототип 2 — вырожденный случай. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет ровно одно решение.

Шаг 1. Развилка старшего коэффициента — вслух и письменно: $a - 1 = 0$ или $a - 1 \neq 0$.

Шаг 2. Случай $a = 1$: уравнение линейное, $2x - 1 = 0$, единственный корень $x = 1/2$. Условие выполнено — $a = 1$ идёт в ответ.

Шаг 3. Случай $a \neq 1$: уравнение квадратное, единственность — это $D = 0$. Считаем: $D = 4 + 4(a - 1) = 4a$; ноль при $a = 0$.

Шаг 4. Проверка границы подстановкой: при $a = 0$ уравнение $-x^2 + 2x - 1 = 0$ — это $-(x - 1)^2 = 0$, корень один. Честно.

Шаг 5. Собираем ветви: $a = 0$ или $a = 1$.

Ответ: $a = 0$; $a = 1$. Решение «в лоб дискриминантом» нашло бы только $a = 0$ и пропустило бы линейный случай $a = 1$.

Прототип 3 — словарь по картинке с границей. При каких a уравнение $|(x - 1)^2 - 4| = a$ имеет ровно три различных решения, удовлетворяющих $x \geq 0$?

Шаг 1. На рисунке оставляем только $x \geq 0$. В точке $x = 0$ значение функции равно 3. Затем график поднимается к (1; 4), опускается к (3; 0) и снова растёт. На каждом из этих трёх участков он строго монотонен.

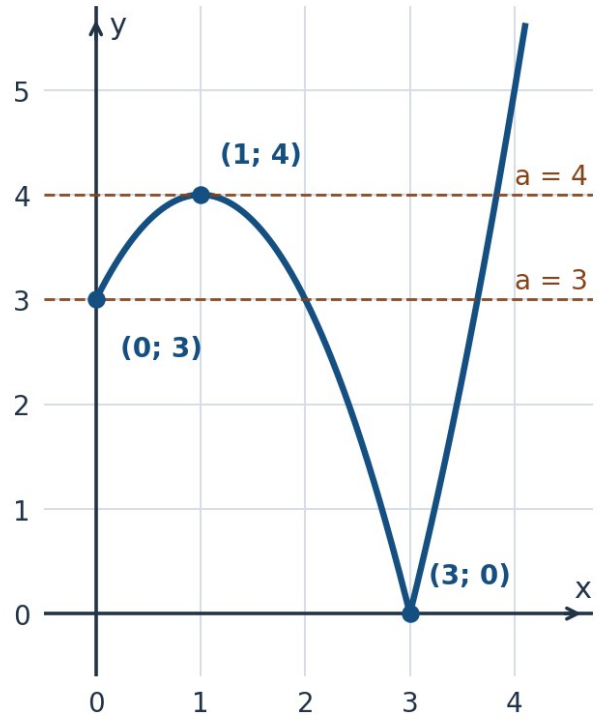


Рис. 18.2. Закрашенная точка (0; 3) принадлежит графику.

Шаг 2. Считаем пересечения с горизонталью y = a. На [0; 1) функция принимает значения из [3; 4). На [1; 3) — значения из (0; 4]. На [3; +∞) — из [0; +∞). Концы x = 1 и x = 3 распределили между участками, чтобы не посчитать их дважды.

Уровень a	Число решений
a < 0	0
a = 0	1
0 < a < 3	2
3 ≤ a < 4	3
a = 4	2
a > 4	1

Шаг 3. Проверим две границы. При a = 3 левая точка x = 0 учитывается, поэтому пересечений три. При a = 4 первые два пересечения сходятся в x = 1, поэтому остаются два.

Ответ: [3; 4).

Прототип 4 — выколотый корень. При каких a уравнение $(x-4)(x+a-7)/(x-2)=0$ имеет ровно два различных корня?

Шаг 1. Область определения: $x \neq 2$. При нуле знаменателя дробь остаётся неопределённой, даже если числитель тоже ноль.

Шаг 2. Кандидаты из числителя — $x = 4$ и $x = 7 - a$. Первый допустим всегда. Второй совпадает с первым при $a = 3$ и нарушает ОДЗ при $a = 5$.

Шаг 3. При $a = 3$ остаётся один корень $x = 4$. При $a = 5$ он тоже единственный. При всех других a оба кандидата допустимы и различны.

Ответ: все действительные a, кроме 3 и 5.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. Перед ответом выпишите особые значения параметра и проверьте их отдельно.

1) При каких действительных a уравнение $(x - 2)(x + a - 4)/(x + a) = 0$ имеет два различных действительных корня?

2) Найдите все действительные a, при которых уравнение $(x - 3)((a - 2)x^2 - 4x + a + 1) = 0$ имеет ровно два различных действительных корня.

3) При каких a прямая $y = a + x/2$ и график $y = |x + 2| + |x - 3|$ имеют ровно две общие точки?

4) При каких действительных a система из двух уравнений $y = x + a$ и $y = |x - 2| + 1$ имеет ровно одно решение $(x; y)$?

Тренажёры. Параметр на графике · Экзаменационные задачи №18.

Задание 19 Цифровой детектив: дело для профессионалов

Упражнения к заданию №19

Что хотят. Задача про целые числа из трёх пунктов: могут попросить привести пример, доказать возможность или невозможность, найти наибольшее или наименьшее. Ответ «да» или «нет» определяется условиями задачи. Четыре первичных балла. Читатели базовой книги помнят «Цифрового детектива» — здесь то же следствие, но дело перешло в профессиональную лигу: каждую улику надо проверять, а при поиске экстремума надо ещё доказать, что лучший пример действительно лучший. Выберите инструмент под вопрос.

Прейскурант эксперта. Полное обоснованное решение даёт четыре первичных балла. Для пункта с наибольшим или наименьшим значением дайте оценку и пример, который её достигает. Как учитывается частичный результат, определяют критерии конкретного комплекта. Считайте каждый пункт самостоятельной возможностью показать рассуждение.

Классическая ловушка. Доказательство подменяется опытом поиска. У неё две стороны. Сторона б: «не может — я перебрал кучу вариантов и не нашёл». Если проверили только несколько возможностей, нельзя сделать вывод о всех. Для доказательства невозможности ищите необходимое условие, например неизменную чётность. Подойдёт и полный перебор, если объяснить, почему он охватывает все случаи. Сторона в: «наибольшее — вот это, больше я не придумал». Рекорд без оценки — половина результата: нужно неравенство, объясняющее, почему больше не бывает в принципе. Личный опыт поиска — не математический объект; эксперт оплачивает рассуждения, а не усердие.

Вредный совет. «Пиши уверенно: „очевидно, что больше нельзя“. Перебрал пять вариантов — так и укажи: „проверено многократно“. Эксперт видит, что человек старался, а старание — это уже почти доказательство».

А теперь серьёзно. Три жанра — три инструмента. Жанр «приведите пример»: предъявите и проверьте — конструкция плюс честная арифметика; пример без проверки — заявка, а не результат. Жанр «может ли» с ответом «нет»: инвариант — то, что не меняется: чётность, остатки, делимость, сумма цифр; одно короткое противоречие сильнее страницы перебора. Жанр «найдите наибольшее»: двухходовка — сначала оценка (наш кандидат обязан быть кратен шести, значит, больше 996 среди трёхзначных не бывает), затем пример, оценку достигающий;

порядок именно такой, оценка ведёт, пример подтверждает. Выбор метода — отдельный тренируемый навык: лабиринт задачника Сверака устроен как серия развилок «строим пример или доказываем невозможность — и чем именно», и проходить его стоит до, а не вместо задач. Лампочка: арифметика каждого примера пересчитывается столбиком; пример, в котором 34 + 35 + 36 равно чему-то не тому, — это минус результат на ровном месте.

Карта темы

Пять полок — по анатомии задачи.

- **Конструкции примеров.** Жадный ход, подгонка с последней цифры, малые случаи. Пример обязан приходить с проверкой в комплекте.
- **Инварианты.** То, что не меняется: чётность, остатки от деления, признаки делимости, сумма цифр. Главный поставщик слова «нельзя» — в тренажёре под инварианты отведён отдельный раздел и восемь приёмов.
- **Оценка плюс пример.** Штатное устройство пункта в: неравенство-граница и рекорд, её достигающий. Обоснуйте границу и покажите, что её можно достичь в условиях задачи.
- **Цифровая запись.** Родовое гнездо детектива: разряды, перестановки и вычёркивания цифр, признаки на 3, 9 и 11. Сиквел базовой девятнадцатой в полный рост.
- **Выбор метода.** Полка-надстройка: определить жанр вопроса раньше, чем начать писать. Тренируется лабиринтом — развилки ведут от формулировки к инструменту.

Разбор основных прототипов

Прототип 1 — три жанра в одной задаче. а) Можно ли представить число 105 в виде суммы трёх последовательных натуральных чисел? б) Можно ли так представить число 100? в) Найдите наибольшее трёхзначное число, представимое в виде суммы трёх последовательных чётных натуральных чисел.

Пункт а, шаг 1. Сумма трёх последовательных — это утроенное среднее: n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1). Делим: 105 : 3 = 35 — среднее найдено.

Шаг 2. Пример: 34 + 35 + 36. Проверка столбиком: 34 + 35 = 69, 69 + 36 = 105. Результат первый добыт.

Пункт б, шаг 1. Инвариант: любая такая сумма равна 3(n+1) — кратна трём. Это свойство обязано выполняться.

Шаг 2. Проверяем 100: сумма цифр 1, на три не делится. Противоречие — представить нельзя. Результат второй; заметьте, ни одного перебора.

Пункт в, шаг 1. Оценка. Сумма трёх последовательных чётных: 2m + (2m+2) + (2m+4) = 6m + 6 — кратна шести. Наибольшее трёхзначное кратное шести — 996; больше не бывает в принципе.

Шаг 2. Пример, достигающий оценки: 6m + 6 = 996 даёт m = 165, числа 330, 332, 334. Проверка: 330 + 332 = 662, 662 + 334 = 996. Оценка достигнута.



Ответ: а) да, 34 + 35 + 36; б) нет; в) 996 = 330 + 332 + 334.

Прототип 2 — детектив по цифрам. а) Приведите пример трёхзначного числа, кратного 11, сумма цифр которого равна 6. б) Докажите, что не существует трёхзначного числа, кратного 11, с суммой цифр 5. в) Найдите наибольшее трёхзначное число, кратное 11, с суммой цифр 6.

Пункт а, шаг 1. Признак одиннадцати: у числа с цифрами a, b, c знакочередующаяся сумма a − b + c делится на 11.

Шаг 2. Кандидат 132: знакочередующаяся сумма 1 − 3 + 2 = 0 — делится; сумма цифр 1 + 3 + 2 = 6. Проверка делением: 132 = 11 · 12. Результат добыт.

Пункт б. Если сумма цифр равна 5, то знакочередующаяся сумма равна 5 − 2b. Поскольку 0 ≤ b ≤ 5, это нечётное число от −5 до 5. В этом промежутке единственное кратное 11 — ноль, чётное число. Значит, нужного числа нет.

Пункт в, шаг 1. Оценка. При сумме цифр 6 величина a − b + c = 6 − 2b лежит между −6 и 6. Единственное кратное 11 в этом диапазоне — 0. Поэтому b = 3 и a + c = 3. Наибольшая первая цифра равна 3 и достигается при c = 0. Больше 330 не собрать.

Шаг 2. Пример: 330 = 11 · 30, сумма цифр 6. Оценка достигнута.

Ответ: а) 132; б) не существует; в) 330.

Проверь себя

Ответы — в конце книги. В каждом пункте сначала решите, что нужно обосновать: возможность, невозможность или точную границу.

1) В наборе восемь жетонов по 3 очка и одиннадцать жетонов по 7 очков. Каждый взятый жетон можно использовать один раз.

а) Можно ли набрать ровно 88 очков?

б) Можно ли набрать ровно 100 очков?

в) К набору добавляют жетоны по 2 очка. Сколько таких жетонов нужно добавить как минимум, чтобы можно было набрать любую целую сумму от 2 до 108 очков включительно? Для каждой суммы можно выбирать жетоны заново.

2) На доске пишут различные двузначные натуральные числа, кратные 4. С каждой цифрой десятков разрешается записать не более двух чисел.

а) Можно ли записать четыре числа с суммой 82?

б) Можно ли записать пять чисел со средним арифметическим 24?

в) Какова наибольшая сумма шести чисел, которые можно записать по этим правилам?

3) В трёх пронумерованных стопках лежат 11, 17 и 26 карточек соответственно. За ход разрешается переложить ровно две карточки из одной стопки в другую, если после хода в каждой стопке останется хотя бы одна карточка.

а) Можно ли получить 9, 21 и 24 карточки соответственно?

б) Можно ли получить 10, 18 и 26 карточек соответственно?

в) Какой наименьшей может стать разность между количеством карточек в самой большой и в самой маленькой стопках?

Тренажёры. Оценка плюс пример · Экзаменационные задачи №19.

Ответы

Решения к заданиям второй части даны в следующем приложении.

Задание 1

1. 95 · **2.** 13 · **3.** 38 · **4.** 54 · **5.** 14

Задание 2

1. **20.** Из N в M получаем (3; 4). Умножение на −4 увеличивает длину 5 в четыре раза.
2. **−13.** С рисунка c = (−5; 2), d = (3; 1). Получаем −5 · 3 + 2 · 1.
3. **−0,96.** Скалярное произведение u и −v равно −144, произведение длин равно 150.
4. **3.** Скалярное произведение (6; −6) и (x; 3) равно 6x − 18. Приравняйте его к нулю.
5. **10.** Из H в F идёт вектор EF − EH = (−8; −6). Его длина равна 10.
6. **25.** Сначала 2a + b + c = (7; 24). Длина равна √625.

Задание 3

1. 22,5 · **2.** 13 · **3.** 196 · **4.** 18 · **5.** 17,5

Задание 4

1. **0,6875.** $(80-14-11):80=55:80$.
2. **0,52.** $(16+10):(24+16+10)=26:50$.
3. **0,54.** $0,86-0,32$.
4. **0,5.** Подходят 1, 2 и 4 из шести результатов.
5. **0,25.** Одинаковых пар для первых двух бросков две, разных для последних две. Из 16 последовательностей подходят четыре.

Задание 5

1. **0,045.** $0,75\cdot 0,25\cdot 0,4\cdot 0,6$.
2. **0,405.** $1-0,85\cdot 0,7$.
3. **0,38.** Обе совместные ситуации надо убрать из суммы дважды: $(0,32-0,09)+(0,24-0,09)$.
4. **0,054.** $0,35\cdot 0,08+0,65\cdot 0,04$.

5. **0,4.** Новые отмеченные дают $0,80 \cdot 0,05 = 0,04$, все отмеченные дают $0,04 + 0,20 \cdot 0,30 = 0,10$, доля новых равна $0,04 : 0,10$.

Задание 6

1. 0,5 · **2.** −2 · **3.** 1,5 · **4.** 7 · **5.** −8 · **6.** 0,75

Задание 7

1. 3 · **2.** −1 · **3.** −3 · **4.** 1,75 · **5.** −4 · **6.** 0,8

Задание 8

1. **0,25.** У касательной наклон $\big(0 - (-2)\big) / \big(3 - (-5)\big) = 2/8$.
2. **4.** Скорость $x'(t) = 7 - t$ в метрах в секунду. При $t = 3$ она равна 4.
3. **2.** При $x = -4$ и $x = 3$ производная меняет знак с плюса на минус. Обе точки входят в заданный отрезок. При $x = -1$ смена обратная, а при $x = 1$ знак с обеих сторон положителен.
4. **−5.** Угловой коэффициент касательной равен $2 \cdot 4 + b = 8 + b$. Решите $8 + b = 3$.
5. **2.** Отрицательный наклон у касательных в A и B. Касательные в C и E горизонтальны.

Задание 9

1. **4.** Из уравнения получаются $t = 4$ и $t = 8$. В диапазоне $[\,0\,;6\,]$ остаётся 4.
2. **12.** $l = (100 - 16) : 7$.
3. **24.** $40 : 5 = 8 = 2^3$, поэтому $t = 8 \cdot 3$.
4. **5.** При 5 модулях мощность 90 Вт, при 6 — 102 Вт. Мощность растёт с числом модулей.
5. **30.** 600 г $= 0,6$ кг; $8100 : (450 \cdot 0,6) = 30$.

Задание 10

1. **40.** Разность длительностей движения равна $0,5 + 0,75 = 1,25$ часа. $150 / v - 150 / (v + 20) = 1,25$ даёт корни 40 и −60, подходит положительный.
2. **6,8.** За два часа первый завершил $1/5$ заказа. Совместная производительность $1/10 + 1/15 = 1/6$, значит, оставшиеся $4/5$ заказа занимают $4,8$ часа.
3. **100.** $0,16 \cdot 300 + 0,4\,x = 0,22(300 + x)$.

4. **15.** Из $36/(v-3)-36/(v+3)=1$ получаем $v^2=225$. Условию $v>3$ удовлетворяет $v=15$.

5. **36.** $5a_1+4(0+1+2+3+4)=140$; $a_1=20$, пятый член $20+4\cdot 4=36$.

Задание 11

1. **6.** По двум значениям наклон равен −3/2. Уравнение 6 − (3/2)(x + 2) = −6 даёт x = 6.

2. **1.** Парабола имеет формулу f(x) = (x + 2)² + 1. Из f(x) = 10 получаются x = −5 и x = 1. Условию x > −2 удовлетворяет x = 1.

3. **−2.** Подстановка точки (−1; 5) даёт k = (−1 − 2)(5 − 1) = −12. Поэтому f(6) = −12/4 + 1 = −2.

4. **0,75.** Отношение f(3)/f(1) равно a² = 3/12 = 1/4. На таком же шаге от 3 до 5 значение умножается на 1/4. Получается 3/4.

5. **−6.** Из 2 $\log_a 4$ = −4 получаем a^(−2) = 4 и a = 1/2. Тогда $\log_a 8$ = −3.

6. **−3.** Через A имеем k/(4 − 1) − 1 = 3, откуда k = 12. В пересечении 12/(x − 1) = x, где x ≠ 1. Уравнение x² − x − 12 = 0 имеет корни 4 и −3.

Задание 12

1. **−12.** При x = −1, 3, 4 значения функции соответственно равны 20, −12, −5. Из внутренних точек производная обращается в ноль только при x = 3. Точка x = −1 уже учтена как граница.

2. **1.** y′ = 6(x + 2)(x − 1). При x = 1 знак производной меняется с минуса на плюс.

3. **6.** y′ = 2e^(2x)(x − 7)(x − 6). В точке x = 6 знак меняется с плюса на минус. При x = 7 смена обратная.

4. **6.** y′ = 3(x − 1)(x − 3) > 0 внутри [0; 1]. Максимальное значение достигается при x = 1 и равно 6.

5. **−0,5.** При x > −2,5 производная равна 3 − 12/(2x + 5). Она равна нулю при x = −0,5, отрицательна слева в области определения и положительна справа.

6. **2.** На x > 0 производная равна 1/√x − 1. Кандидаты на отрезке 0, 1, 9 дают значения 5, 6, 2 соответственно.

7. **−1.** ОДЗ x ≠ −4. Из y′ = 3 − 27/(x + 4)² получаем x = −7 или x = −1. Производная положительна при |x + 4| > 3, отрицательна при 0 < |x + 4| < 3. При x = −1 знак меняется с минуса на плюс.

Развёрнутые решения к заданиям 13–19

Задание 13

Во всех формулах k — целое число.

1. Формулы разности и приведения

а) Раскроем $\cos(x-\pi/6)$ и заменим $\sin(x+\pi/2)$ на $\cos x$. Слагаемые с $\cos x$ сокращаются, остаётся $\sqrt{3}/2\sin x=-3/4$. Из $\sin x=-\sqrt{3}/2$ получаем $x=4\pi/3+2\pi k$ или $x=5\pi/3+2\pi k$.

б) В первой серии $-2\le k\le -11/8$, во второй $-13/6\le k\le -37/24$. В каждом промежутке подходит только $k=-2$. Ответ — $-8\pi/3,\ -7\pi/3$.

2. Два логарифма

а) На ОДЗ $1-2\cos x>0$ положим $t=\log_2(1-2\cos x)$. Тогда $t/2=3/2-t$, откуда $t=1$. Следовательно, $1-2\cos x=2$ и $\cos x=-1/2$. Все найденные решения удовлетворяют ОДЗ. Получаем $x=2\pi/3+2\pi k$ или $x=4\pi/3+2\pi k$.

б) В первой серии $1/4\le k\le 4/3$, поэтому $k=1$. Во второй $-1/12\le k\le 1$, поэтому $k=0,1$. Ответ — $4\pi/3,\ 8\pi/3,\ 10\pi/3$.

3. Дробь и область определения

а) На ОДЗ $\cos x\neq 0$ положим $c=\cos x$. Числитель равен $2(2c^2-1)+c+2=4c^2+c$. Дробь упрощается до $4c+1$. Тогда $c=-\sqrt{3}/2$, и найденный косинус отличен от нуля. Получаем $x=5\pi/6+2\pi k$ или $x=-5\pi/6+2\pi k$.

б) Для первой серии $-2\le k\le -2/3$, подходят $-2,-1$. Для второй $-7/6\le k\le 1/6$, подходят $-1,0$. Ответ — $-19\pi/6,\ -17\pi/6,\ -7\pi/6,\ -5\pi/6$.

4. Двойной угол

а) Сгруппируем квадраты: $\sqrt{3}\sin(2x)=3\cos(2x)$. При $\cos(2x)=0$ равенство невозможно, поскольку $\sin(2x)=\pm 1$. Поэтому делим на $\sqrt{3}\cos(2x)$, получаем $\tan(2x)=\sqrt{3}$ и $x=\pi/6+\pi k/2$.

б) Подстановка в границы отрезка даёт $-3\le k\le 0$. Ответ — $-4\pi/3,\ -5\pi/6,\ -\pi/3,\ \pi/6$.

Задание 14

1. Средние точки и объём тетраэдра

а) Точки M и N лежат на параллельных рёбрах BB_1 и DD_1, причём BM = DN. Поэтому BMND — параллелограмм, а MN ∥ BD.

б) Пусть O — точка пересечения AC и BD, а P — середина MN. По свойству параллелограмма BMND точка P лежит над O, причём $OP = AA_1/2 = 2$. Треугольник ACP лежит в вертикальной плоскости и делит тетраэдр на две пирамиды с общим основанием ACP и вершинами M и N.

Расстояния от M и N до этой плоскости равны расстояниям от B и D до прямой AC. Действительно, горизонтальный перпендикуляр к AC одновременно перпендикулярен вертикальной плоскости, проходящей через AC, а вертикальный перенос точки сохраняет это расстояние. Расстояния от B и D до AC равны по центральной симметрии относительно O. Обозначим каждое из них через d. Так как площадь треугольника ABC равна $9 \cdot 6 : 2 = 27$, имеем $AC \cdot d = 54$. Площадь треугольника ACP равна $AC \cdot OP/2 = AC$. Поэтому суммарный объём двух пирамид равен $AC \cdot (d + d)/3 = 36$.

Ответ к б) 36.

2. Двугранный угол в пирамиде

а) В правильной пирамиде SB = SC. Медиана SM равнобедренного треугольника SBC одновременно его высота, поэтому $SM \perp BC$. В квадрате ABCD отрезок OM, соединяющий центр квадрата с серединой BC, тоже перпендикулярен BC. Оба перпендикуляра проведены из M. Первый лежит в боковой грани, второй — в основании. Значит, $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла, образованного этими гранями при BC.

б) В прямоугольном треугольнике SOM катеты OM = 5 и SO = 12. Гипотенуза $SM = \sqrt{(25 + 144)} = 13$. Косинус угла при M равен $OM/SM = 5/13$.

Ответ к б) 5/13.

3. Треугольник в правильной призме

а) В прямоугольных треугольниках ACC_1 и BCC_1 катеты AC и BC равны, второй катет CC_1 общий. Следовательно, $AC_1 = BC_1$. Треугольник ABC_1 равнобедренный, и его медиана C_1M служит высотой. Значит, $C_1M \perp AB$.

б) В равностороннем треугольнике ABC отрезок CM — высота. Получаем $CM = \sqrt{(6^2 - 3^2)} = 3\sqrt{3}$. Ребро CC_1 перпендикулярно плоскости основания, значит, треугольник C_1CM прямоугольный. Отсюда $C_1M = \sqrt{(4^2 + 27)} = \sqrt{43}$, а площадь ABC_1 равна $6 \cdot \sqrt{43} : 2 = 3\sqrt{43}$.

Ответ к б) $3\sqrt{43}$.

4. Отсечённый тетраэдр и расстояние

а) Сначала сравним объёмы тетраэдров DCMN и DCMB по общему основанию DCM. Так как N лежит на DB и DN/DB = 2/3, их высоты из N и B к плоскости DCM относятся как 2 : 3. Затем сравним объёмы DCMB и DCAB по общему основанию DCB. Их высоты

из M и A к DCB относятся как DM : DA = 1 : 3. Поэтому объём DCMN составляет (2/3) · (1/3) = 2/9 объёма исходного тетраэдра. На вторую часть приходится 7/9, а отношение равно 2 : 7.

б) Пусть H — проекция B на плоскость ACD. Поскольку BA = BC = BD, из прямоугольных треугольников с общим катетом BH следует HA = HC = HD. Значит, H — центр описанной окружности равностороннего треугольника ACD. Его радиус равен $12/\sqrt{3}$. Высота $BH = \sqrt{12^2 - (12/\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{6}$. Расстояние от N до плоскости составляет 2/3 от BH. Это следует из подобия прямоугольных треугольников с общей вершиной D, гипотенузами DN и DB и перпендикулярами к плоскости из N и B. Искомое расстояние равно $8\sqrt{6}/3$.

Ответ к б) $8\sqrt{6}/3$.

Задание 15

1. Строгое неравенство и чётная кратность

На ОДЗ $x \neq -3$ и $x \neq 4$ дробь определена. При $x \neq -5$ множитель $(x+5)^2$ положителен, поэтому знак дроби совпадает со знаком $(x-2)/((x+3)(x-4))$. В порядке возрастания получаем критические значения -5, -3, 2, 4. Слева от -3 дробь отрицательна, кроме её нуля -5. Между -3 и 2 она положительна, между 2 и 4 отрицательна, правее 4 положительна. При $x = -5$ и $x = 2$ дробь равна нулю, а условие строгое. Точки -3 и 4 исключены ОДЗ.

Ответ. $x < -5$ или $-5 < x < -3$ или $2 < x < 4$.

2. Два логарифма с убывающим основанием

Из $x + 3 > 0$ и $2x - 1 > 0$ следует $x > 1/2$. Функция $\log_{1/3}$ убывает. Поэтому исходное неравенство на ОДЗ равносильно $x + 3 \geq 2x - 1$, то есть $x \leq 4$. При $x = 4$ аргументы равны, а при $x = 1/2$ второй логарифм не существует.

Ответ. $1/2 < x \leq 4$.

3. Положительная замена

При $t = 3^x$ имеем $t > 0$ и $9^x = t^2$. Получаем $t^2 + 2t - 15 = (t+5)(t-3) > 0$. Так как $t + 5 > 0$, остаётся $t > 3$. Функция 3^x возрастает, значит $x > 1$. При $x = 1$ выражение равно нулю, а знак строгий.

Ответ. $x > 1$.

4. Вложенный логарифм в рациональном неравенстве

Пусть $t = \log_3 x$. Исходная запись требует $x > 0$, $t > 0$ и $t \neq 1$. Вместе это означает $x > 1$ и $x \neq 3$. На ОДЗ $2^{\log_2 t} = t$. Перенеся единицу в левую часть, получаем

$(t-2)/(t-1)-1=-1/(t-1)\ge 0$. Числитель отрицателен и отличен от нуля, поэтому знаменатель должен быть отрицательным. Остаётся $0<t<1$. После возвращения к x имеем $1<x<3$. Обе границы исключены исходной записью.

Ответ. $1<x<3$.

5. Показательная замена и выколотое значение

Положим $t=3^x>0$. Знаменатель первой дроби требует $t\neq 1$. Так как $9^x=t^2$, при $t\neq 1$ левая часть равна $t+1$. Неравенство $t+1\le 6/t$ можно умножить на положительное t. Получаем $(t+3)(t-2)\le 0$, то есть $t\le 2$, поскольку $t+3>0$. Итак, $0<t\le 2$ и $t\neq 1$. По возрастанию 3^x получаем $x\le \log_3 2$, $x\neq 0$.

Ответ. $x<0$ или $0<x\le \log_3 2$.

6. Сокращение выражения с корнем

Пусть $t=\sqrt{x+5}$, тогда $t\ge 0$ и $x=t^2-5$. В знаменателе первый множитель запрещает $t=2$, второй запрещает $x=11$, то есть $t=4$. Подставляем $x-11=t^2-16=(t-4)(t+4)$. На ОДЗ дробь равна $1/((t-2)(t+4))$. Множитель $t+4$ положителен, поэтому дробь положительна при $t>2$. До сокращения также запрещалось $t=4$. Получаем $x=t^2-5>-1$ и $x\neq 11$. Равенство нулю невозможно на исходной области определения.

Ответ. $-1<x<11$ или $x>11$.

7. Переменное основание

ОДЗ задают $x+2>0$, $x+2\neq 1$, $3x+5>0$. Вместе это $x>-5/3$ и $x\neq -1$. Правая часть равна $\log_{x+2}(x+2)$ на ОДЗ.

При $-5/3<x<-1$ основание между нулём и единицей. Аргументы сравниваем с обращением знака. $3x+5\le x+2$ даёт $x\le -3/2$. Подходят $-5/3<x\le -3/2$.

При $x>-1$ основание больше единицы. Знак сохраняем. $3x+5\ge x+2$ даёт $x\ge -3/2$, что выполнено во всём этом случае. Точка -1 запрещена как основание 1, при $x=-5/3$ недопустим аргумент 0, а $-3/2$ даёт равенство.

Ответ. $-5/3<x\le -3/2$ или $x>-1$.

Задание 16

1. Единая ставка и два шага уменьшения долга

Считаем в тысячах рублей. За первые два года остаток уменьшился на 750 − 360 = 390, то есть на 195 за год. За последние три года остаток уменьшился на 360, то есть на 120 за год.

Перед начислением процентов остатки равнялись 750, 555, 360, 240 и 120. Их сумма равна 2025. За весь срок компания выплатила 750 основного долга и проценты. Поэтому на проценты приходится 912 − 750 = 162. Если доля начисления равна r, получаем 2025r = 162. Отсюда r = 0,08. Это 8% годовых.

Ответ: 8%.

2. Разные ставки и одинаковый шаг

В тысячах рублей остатки перед начислениями равны 720, 540, 360, 180. Первые два умножаем на 0,15, последние два — на 0,1. Общие проценты равны 0,15 · (720 + 540) + 0,1 · (360 + 180) = 243. Основной долг погашается полностью, поэтому сумма платежей составляет 720 + 243 = 963.

Ответ: 963 тыс. рублей.

3. Два равных платежа

Пусть каждый платёж равен P тысяч рублей. После первого начисления долг равен 315 · 1,1 = 346,5. Остаток после платежа равен 346,5 − P. На второй год банк умножает этот остаток на 1,1. После второго платежа долга нет:

$$1{,}1\left(346{,}5-P\right)-P=0.$$

Из $2{,}1\,P=381{,}15$ получаем $P=181{,}5$. После первого платежа осталось $346{,}5-181{,}5=165$. Проверка: на второй год $165\cdot 1{,}1=181{,}5$, остаток гасится целиком.

Ответ: 165 тыс. рублей.

4. Вклад с промежуточным пополнением

Через первый год на счёте $150\cdot 1{,}12=168$ тысяч рублей. После пополнения стало $168+30=198$. Через второй год проценты начислены на всю эту сумму. Получаем $198\cdot 1{,}08=213{,}84$.

Ответ: 213,84 тыс. рублей.

Задание 17

1. Высота к гипотенузе

а) Углы AHC и CHB прямые. Так как H лежит на AB, ∠HBC = ∠ABC. По сумме углов в треугольниках ABC и CHB получаем ∠HAC = 90° − ∠ABC = ∠HCB. Значит, треугольники AHC и CHB подобны по двум углам.

б) Из подобия следует AH/CH = CH/HB, то есть $CH^2 = AH \cdot HB$. Пусть AH = x. В прямоугольном треугольнике AHC имеем $15^2 = x^2 + 16x$. Перепишем это как (x − 9)(x + 25) = 0. Поскольку x > 0, AH = 9, а CH = √(9 · 16) = 12.

Ответ к б) 12.

2. Две касательные, хорда и площадь

а) В прямоугольных треугольниках ABO и ACO радиусы OB и OC равны, гипотенуза AO общая. Значит, треугольники равны и $AB = AC$. Точки A и O равноудалены от B и C, поэтому AO — серединный перпендикуляр к BC. В прямоугольном треугольнике ABO точка D служит основанием высоты из B и лежит на гипотенузе OA. Значит, $\angle BAD = \angle BAO$ и $\angle ADB = \angle ABO = 90°$. По двум углам треугольники ABD и AOB подобны.

б) По Пифагору $AB = \sqrt{(20^2 - 12^2)} = 16$. Из подобия ABD и AOB получаем $AD = AB^2/AO = 256/20 = 12{,}8$ и $BD = AB \cdot OB/AO = 16 \cdot 12/20 = 9{,}6$. Тогда $BC = 2 \cdot BD = 19{,}2$. Высота треугольника ABC из точки A равна AD. Площадь $S = 19{,}2 \cdot 12{,}8 : 2 = 122{,}88$.

Ответ к б) 122,88.

3. Две дуги вписанного четырёхугольника

а) Угол BAD опирается на дугу BCD, угол BCD — на дугу BAD. Вместе дуги образуют всю окружность. Сумма углов BAD и BCD равна половине суммы градусных мер двух дуг, то есть 180°.

б) Диагональ AC проходит внутри угла BAD, поэтому $\angle BAD = 30° + 42° = 72°$. Тогда $\angle BCD = 180° - 72° = 108°$.

Ответ к б) 108°.

4. Описанная трапеция

а) Обозначим через p, q, r, s длины касательных от вершин A, B, C, D до точек касания. Из каждой вершины длины двух таких отрезков равны. Поэтому $AB = p + q$, $BC = q + r$, $CD = r + s$, $AD = s + p$. Обе суммы $AB + CD$ и $AD + BC$ равны $p + q + r + s$.

б) По доказанному $CD = AD + BC - AB = 12 + 15 - 18 = 9$. Высота прямоугольной трапеции равна $AD = 12$. Площадь $S = (18 + 9) \cdot 12 : 2 = 162$.

Ответ к б) 162.

Задание 18

1. Два различных корня дробного уравнения

Для каждого действительного a область определения задаётся условием $x \neq -a$. При выполнении этого условия дробь равна нулю тогда и только тогда, когда $x = 2$ или $x = 4 - a$.

Значение $x = 2$ запрещено при $a = -2$. Второй кандидат допустим при всех a, поскольку $4 - a \neq -a$. Кандидаты совпадают при $a = 2$. При $a = -2$ остаётся $x = 6$, а при a

= 2 остаётся x = 2. При всех остальных a существуют два различных допустимых корня.

Ответ: все действительные a, кроме −2 и 2.

2. Общий корень двух множителей

Корень x = 3 имеется при каждом a. Обозначим второй множитель через $Q(x) = (a - 2)x^2 - 4x + a + 1$.

При a = 2 выражение Q(x) = −4x + 3. Его единственный корень x = 3/4 отличается от 3. Это значение параметра подходит.

Пусть a ≠ 2. Тогда Q — квадратный трёхчлен с дискриминантом $D = 16 - 4(a - 2)(a + 1) = 4(3 - a)(a + 2)$.

- При a < −2 или a > 3 дискриминант отрицателен. Есть лишь корень x = 3.
- При a = −2 или a = 3 дискриминант равен нулю. Единственный корень Q равен соответственно −1/2 или 2. Оба отличаются от 3, поэтому каждое из этих значений a даёт ровно два корня исходного уравнения.
- При −2 < a < 3 и a ≠ 2 у Q два различных корня. Всего корней будет ровно два, если один из этих двух уже равен 3. Подстановка даёт Q(3) = 10a − 29. Поэтому a = 29/10, и это значение действительно лежит внутри (−2; 3).

Случаи исчерпывают все действительные a.

Ответ: −2, 2, 29/10, 3.

3. Наклонная прямая и кусочно-линейный график

Перенесём x/2 в левую часть, чтобы считать пересечения графика $h(x) = |x + 2| + |x - 3| - x/2$ с горизонталью y = a. По знакам под модулями:

Область	h(x)	Изменение
$x \le -2$	$1 - 5x/2$	Убывает от сколь угодно больших значений до 6
$-2 \le x \le 3$	$5 - x/2$	Убывает от 6 до 7/2
$x \ge 3$	$3x/2 - 1$	Возрастает от 7/2 без верхней границы

Куски слева соединяются в x = −2, и вместе образуют строго убывающую ветвь на (−∞; 3]. Правая ветвь на [3; +∞) строго возрастает. При a < 7/2 пересечений нет. При a = 7/2 обе ветви дают одну и ту же точку x = 3. При a > 7/2 каждая даёт отдельную точку. В частности, при a = 6 стык x = −2 считается один раз.

Ответ: $a > 7/2$.

4. Система и совпавшая ветвь

При $x < 2$ второе уравнение принимает вид $y = 3 - x$. Равенство $x + a = 3 - x$ даёт $x = (3 - a)/2$. Этот корень принадлежит $x < 2$ тогда и только тогда, когда $a > -1$.

При $x \geq 2$ второе уравнение принимает вид $y = x - 1$. Поэтому при $a = -1$ подходит любое $x \geq 2$, а при остальных значениях a с этой ветви решений нет.

При $a < -1$ система не имеет решений, при $a = -1$ имеет бесконечно много решений, при $a > -1$ имеет ровно одно решение.

Ответ: $a > -1$.

Задание 19

1. Жетоны с ограниченным запасом

а) Можно. Берём шесть жетонов по 3 очка и десять по 7 очков. Их достаточно в наборе, и $6 \cdot 3 + 10 \cdot 7 = 88$.

б) Все имеющиеся жетоны дают $8 \cdot 3 + 11 \cdot 7 = 101$ очко. Если оставить в наборе хотя бы один неиспользованный жетон, сумма уменьшится минимум на 3. Получить 100 очков нельзя.

в) С четырьмя дополнительными жетонами общая сумма равна $101 + 4 \cdot 2 = 109$. Для 108 очков пришлось бы оставить жетоны суммарной величины 1, а каждый жетон даёт хотя бы 2 очка. При количестве дополнительных жетонов не более трёх общая сумма не превосходит 107. Значит, нужны хотя бы пять.

Покажем, что пяти хватит. Используем сначала только жетоны по 2 и по 3 очка.

- Берём чётное количество жетонов по 3: 0, 2, 4, 6 или 8. Добавляя от нуля до пяти жетонов по 2, при каждом таком выборе получаем все чётные числа от соответствующей стартовой суммы до неё плюс 10. Стартовые суммы равны 0, 6, 12, 18 и 24. Эти последовательности перекрываются, поэтому получаем все чётные суммы от 0 до 34.
- Берём нечётное количество жетонов по 3: 1, 3, 5 или 7. С теми же жетонами по 2 получаем все нечётные суммы от 3 до 31. Стартовые суммы равны 3, 9, 15 и 21.

В частности, получаются все целые суммы от 2 до 32. Если добавить k жетонов по 7 при $k = 0, 1, \ldots, 11$, для каждого k получим все целые суммы от $2 + 7k$ до $32 + 7k$. Промежутки перекрываются. В их объединении есть все целые числа от 2 до 109, в том числе каждое число от 2 до 108.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5 жетонов.

2. Числа на доске

а) Сумма четырёх чисел, кратных 4, тоже кратна 4. Поскольку 82 не делится на 4, такой набор невозможен.

б) Можно записать 12, 16, 24, 28 и 40. Эти числа различны и кратны 4. По два из них имеют цифры десятков 1 и 2, одно — цифру 4. Среднее равно (12 + 16 + 24 + 28 + 40)/5 = 120/5 = 24.

в) В каждом десятке в максимальном наборе берут только одно или два самых больших допустимых числа. Иначе выбранное число можно заменить бóльшим из того же десятка, сохраняя условия и увеличивая сумму. Поэтому достаточно рассмотреть по два наибольших кратных 4 в каждом десятке.

После этого шесть наибольших кандидатов — 96, 92, 88, 84, 76 и 72. Они образуют допустимый набор, по два числа с каждой цифрой десятков 9, 8 и 7. Их сумма равна 508. Любой выбор шести кандидатов даёт сумму не больше 508.

Ответ: а) нет; б) да; в) 508.

3. Карточки в трёх стопках

а) Можно. Переложим две карточки из первой стопки во вторую и затем две из третьей во вторую. Получим (9; 21; 24).

б) При каждом ходе количество карточек в каждой стопке изменяется на 0, 2 или −2. Поэтому в первой и второй стопках оно остаётся нечётным. Состояние (10; 18; 26) недостижимо.

в) Сумма всегда равна 54. При разности 0 во всех стопках было бы по 18 карточек, что нарушает чётность первых двух. При разности 1 пусть в меньшей стопке n карточек. Тогда в каждой стопке n или $n + 1$, причём используются оба значения. Сумма равна $3n + 1$ или $3n + 2$. Она не кратна 3 и потому не может равняться 54. Значит, разность не меньше 2.

Переложим из третьей стопки три раза по две карточки в первую и один раз две во вторую. Получается (17; 19; 18), все стопки остаются непустыми. Разность равна 2, так что нижняя граница достигается.

Ответ: а) да; б) нет; в) 2.

Работы выпускников с комментариями экспертов

Откройте работу участника, закройте комментарий эксперта и попробуйте поставить балл. Затем выясните, какой шаг в записи повлиял на оценку. Ниже примеры ЕГЭ 2019–2025 годов из пособия ФИПИ для экспертов 2026 года. В колонке «Демоверсия» — решения и критерии к конкретным заданиям ЕГЭ-2027. Пособие для экспертов · Официальные материалы 2027 года

Номер	Что должно быть видно в записи	Как оценили реальную работу	Демоверсия-2027
13. Уравнение	В пункте а) получите все серии корней. В пункте б) покажите отбор на отрезке. Подойдут двойные неравенства, разметка на окружности или полный перебор допустимых целых значений индекса серии.	**1 из 2.** Общее решение верное. Итоговый список корней в б) тоже совпал, но на окружности перепутаны граница отрезка и подписи корней. Сравните с работой на 2 балла. Пример 13.1.2, с. 15 · Пример 13.1.1, с. 14	Критерии, печатные с. 19–20
14. Стереометрия	Подпишите нужные точки, проведите рабочие линии и обоснуйте, в каком треугольнике или сечении считаете. Запишите доказательство и вычисление раздельно.	**1 из 3.** Утверждение а) доказано. В пункте б) неверно найдена длина отрезка MC, от которой зависит результат. Пример 14.1.2, с. 49–50 · Оценка, с. 50	Критерии, печатные с. 21–22
15. Неравенство	Запишите ОДЗ, преобразования и итоговое множество. Проверьте каждую	**1 из 2.** После преобразований потерялись две допустимые точки	Критерии, печатные с. 23–24

Номер	Что должно быть видно в записи	Как оценили реальную работу	Демоверсия-2027
	точку границы по исходному знаку и по ОДЗ.	равенства, −1 и 1. В соседнем примере они учтены правильно. Пример 15.1.3, с. 92 · Пример 15.1.2, с. 91	
16. Экономическая задача	Обозначьте остаток, ставку и платёж. Подпишите, в какой момент начисляются проценты, за какие месяцы берёте платежи и в каких единицах записаны суммы.	**1 из 2** за верную модель с ошибкой в делении. В другой работе за ту же задачу — **0 из 2**: в одном равенстве суммы в миллионах приравняли к числу, выраженному в тысячах. Пример 16.1.3, с. 123 · Пример 16.1.4, с. 124	Критерии, печатные с. 25–26
17. Планиметрия	Укажите, чем обосновано каждое ключевое равенство или подобие. Если в вычислении опираетесь на вывод пункта а), сначала докажите его.	**1 из 3.** Верный ответ пункта б) обоснован с помощью утверждения из а), доказательство которого пропущено. Пример 17.1.2, с. 157	Первый пример, печатная с. 28 · Второй пример, печатная с. 29
18. Параметр	Покажите, как разбили значения параметра на случаи, откуда	**3 из 4.** Логика решения прослеживается, но ответ потерял оба	Первый пример, печатная с. 32 · Второй пример, печатная с. 33

Номер	Что должно быть видно в записи	Как оценили реальную работу	Демоверсия-2027
	взялись границы и что происходит при каждом граничном значении.	граничных значения $a = -2$ и $a = 2$. Для этой задачи критерий отдельно учитывает такое расхождение. Пример 18.4.2, с. 217–218 · Оценка, с. 218	
19. Числа и их свойства	Для «да» предъявите пример и проверьте его. Для «нет» объясните невозможность. Для наименьшего или наибольшего числа нужны оценка и пример, который её достигает.	**2 из 4.** Пункты а) и б) обоснованы. В пункте в) участник нашёл отношение, но не показал, что оно действительно достигается. Пример 19.1.1, с. 237	Первый пример, печатная с. 34 · Второй пример, печатная с. 36

Перед тем как сдать работу. Проверьте, указаны ли номер и пункты задания, введены ли переменные, видны ли ключевые переходы и ограничения. Запишите ответы по пунктам. Способ решения и форма записи могут отличаться от образца ФИПИ. Читающий должен суметь восстановить ход рассуждений по вашей работе. За верный ответ без решения во второй части ставят 0 баллов. Общие требования, печатная с. 18

Справочные материалы

Словарик паникующего профильника

Каждый термин — в двух переводах: сначала как его понимает народ, потом как он есть на самом деле.

ОДЗ

Магическое заклинание, которое велят писать первым, — никто не помнит зачем.

На самом деле: область допустимых значений — все иксы, при которых выражение имеет смысл. Пишется до преобразований, потому что преобразования умеют расширять её молча.

Дискриминант

Слово из мемов про школьную травму.

На самом деле: $D = b^2 - 4ac$, паспорт квадратного уравнения: положительный — два корня, ноль — один, отрицательный — ни одного действительного.

Серия корней

«x = π/6, и хватит с него».

На самом деле: группа решений тригонометрического уравнения вида $x = x_0 + Tn$, где n — любое целое, а T зависит от уравнения. Для разных серий начало может различаться.

Инвариант

Что-то из физики, лучше не трогать.

На самом деле: то, что не меняется, — чётность, остаток, делимость. Главный инструмент слова «нельзя»: свойство обязано выполняться, а оно не выполняется.

Вырожденный случай

Звучит как оскорбление.

На самом деле: значение параметра, при котором старший коэффициент обнулился и уравнение сменило жанр — например, квадратное стало линейным. Проверяется отдельной строкой, теряется чаще всего.

Аннуитет

Страшное банковское слово, придуманное, чтобы люди не читали договор.

На самом деле: схема кредита с равными платежами. Проверка одна: долг после последнего платежа равен нулю — и эта строка предъявляется.

Апофема

Заклинание четвёртого курса Хогвартса.

На самом деле: высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая к стороне основания. С высотой самой пирамиды не совпадает, и подмена карается неверным ответом.

Скалярное произведение

Умножение стрелок — оксюморон.

На самом деле: в координатах на плоскости это $x_1x_2 + y_1y_2$, в пространстве добавляется z_1z_2. У двух ненулевых векторов нулевое скалярное произведение означает перпендикулярность.

Касание

Романтика.

На самом деле: перестройка числа решений: горизонталь дотянулась до вершины, дискриминант обнулился. В задачах с параметром касания — это границы промежутков ответа.

Точка минимума и наименьшее значение

Одно и то же, сказанное дважды для солидности.

На самом деле: абсцисса точки минимума — это x. Наименьшее значение на заданном промежутке — значение f(x) в том месте, где функция принимает минимум на всём промежутке.

Знакотождественный множитель

Звучит как диагноз.

На самом деле: множитель того же знака, которым в методе рационализации заменяют логарифм или разность степеней, — и громоздкое неравенство складывается в метод интервалов.

Прейскурант эксперта

Наше слово: в критериях его нет, а цены — есть.

На самом деле: таблица «за что дают баллы» из официальных критериев. Открыта, публикуется с демоверсией; знать её — значит собирать баллы там, где другие видят «всё или ничего».

Вредные советы бывалого двоечника

Читать с осторожностью. Применять строго наоборот.

Совет № 1. *Начинай с задания 19 — интеллектуальный аперитив, остальное по остаточному принципу.*

Перевод на полезный: сначала — задания первой части, которые уверенно решаете, затем вторая часть по отдаче: 13 → 15 → 16 → 17 → 14, тяжеловесы 18 и 19 — когда первые пять стабильны. У них контракт до конца экзамена, никуда не денутся.

Совет № 2. *Пиши развёрнутое решение покороче и помельче: экспертам меньше читать — тебе больше симпатии.*

Перевод на полезный: эксперт начисляет за то, что видит. Шаги, ссылки на признаки и слово «пересекающимся» — это не бюрократия, это купюры, разложенные по бланку.

Совет № 3. *ОДЗ пишется в конце, для красоты, если останется место.*

Перевод на полезный: ОДЗ выписываем до преобразований. Перед ответом проверяем каждую граничную точку в исходном неравенстве.

Совет № 4. *Одинаковое слева и справа — сокращай. Косинус маленький, никто не заметит.*

Перевод на полезный: может потеряться целая серия корней. В главе 13 видно, как сохранить её: вынести множитель за скобку и отдельно проверить случай, где он равен нулю.

Совет № 5. *Проценты за все годы посчитай одним махом: ставка на срок — и готово, банк оценит смекалку.*

Перевод на полезный: сначала прочитайте календарь и выясните, на какую сумму начисляют проценты. В таблице или уравнениях покажите порядок начислений и выплат и объясните, что происходит с долгом в конце.

Совет № 6. *В пункте в) девятнадцатого хватит рекордного примера. Оценки — для зануд.*

Перевод на полезный: в задаче на максимум или минимум обоснуйте, почему дальше пройти нельзя, и покажите пример на найденной границе. Как учитываются отдельные шаги, смотрите в критериях конкретной задачи.

Совет № 7. *Черновик — святое. Переписывать на бланк некогда, эксперты догадаются заглянуть.*

Перевод на полезный: черновик не проверяется — нигде и никогда. Всё ценное второй части живёт на бланке развёрнутых ответов; переносите блоками по ходу работы.

Бинго подготовки к профилю

Возьмите карандаш и отмечайте клетки, которые с вами уже случались. Линия по горизонтали, вертикали или диагонали — официальное звание настоящего профильника. Честность приветствуется: это бинго, а не отчёт.

Сказал: «18-е мне не светит»	Умножил неравенство на знаменатель	Сократил на cos x и не заметил	Перепутал точку минимума и минимум
Начислил процент на исходный долг	Забыл треть у пирамиды	Написал «очевидно из чертежа»	Потерял хвост «+2πn»
Взял с графика точку между клетками	Округлил по правилам, а не по смыслу	Доказал пункт а) числами из пункта б)	Вписал больший корень вместо меньшего
Сложил 0,3 и 0,3 без вычитания	Забыл вырожденный случай	Сдал пример без оценки в пункте в)	Прошёл все границы поимённо с первого раза

Собрали линию? Звание присвоено. Теперь — в тренажёр: звание надо оправдывать.

Оракул на случай паники

Инструкция: почувствовали, что параметр сильнее вас, — загадайте число от 1 до 12 и прочтите свой пункт. Оракул работает без батареек и не ошибается, потому что все ответы верные.

- Справка КИМ уже напечатана: четыре формулы ждут на столе, остальные ты умеешь выводить.
- Пройди границы поимённо. Подстановка помогает увидеть потерянную или лишнюю точку.
- Пункт а) четырнадцатого — три строчки. Ты знаешь все три.
- В восемнадцатом можно начать с рисунка или модели. Затем нужно разобрать случаи и обосновать границы.
- Покажи, что уже обосновано. Эксперт сможет его оценить по критериям задачи.
- Минус — законный житель бланка. И ты в этой аудитории — тоже законно.
- У каждой задачи девятнадцатого есть жанр, у жанра — инструмент. Развилки ты уже проходил.
- Икс дождался тебя. Дождёшься и ты своих баллов.

- Таблица по годам гасит любой кредит. И любую панику: строка за строкой, до нуля.
- Касание — не катастрофа, а перестройка. После неё число решений известно точно.
- Две трубы не работают медленнее одной. Ты с этой книгой — тем более.
- Хвост условия будет прочитан. Составители уже нервничают.

Математический гороскоп

Астрология не сдала профиль даже по первой части, но предсказание получить можно. Загадайте число от 1 до 10. Точность — как у прогноза погоды, зато математика внутри настоящая.

- Звёзды сложились в тройку 5–12–13: день будет длинным, но прямоугольным и честным.
- Ретроградный логарифм: при основании меньше единицы всё разворачивается — учитывай при планировании.
- Луна в фазе одной трети: сегодня достаточно объёма пирамиды.
- Меркурий в вырожденном случае: прежде чем действовать, проверь, не обнулился ли старший коэффициент.
- Венера напоминает: производная положительна — ты на подъёме, и касательная смотрит вверх.
- Сатурн передаёт кольцом: вписанный угол вдвое скромнее центрального, а дуга у них общая.
- Юпитер советует метод объёмов: посчитай одно и то же двумя способами — сойдётся, проверено.
- День благоприятен для отбора корней и отсева лишних тревог.
- Прогноз: утром — замена, днём — обратная замена, к вечеру — серия попаданий.
- Знак сегодня один — нестрогий: границы включены, и ты в ответе.

Чек-лист последнего вечера

Вечер накануне экзамена. Карандаш в руку — и по пунктам.

☐ Паспорт лежит у двери. Без него пустят только мою тревогу, а она путает точку минимума с наименьшим значением.

☐ Две чёрные гелевые ручки расписаны: рабочая и талисман. Второй части понадобятся обе.

☐ Линейка найдена. Обычная, честная: ей ещё чертить в четырнадцатом и семнадцатом.

☐ Справочные материалы полистаны заранее: четыре формулы знаю в лицо, вывод остальных — в пальцах.

☐ Помню: хвост условия читается до решения. «Укажите меньший» — это не мелкий шрифт, это балл.

☐ Помню: границы — поимённо; ноль знаменателя не входит никогда, при нестрогом знаке проверяем нули числителя и включаем их, если исходное выражение определено.

☐ Помню: в двенадцатом обвести слово «точка» или «значение» — и свериться с ним в конце.

☐ Порядок захода на вторую часть выбран заранее: 13 → 15 → 16 → 17 → 14, тяжеловесы — по остатку сил и времени.

☐ Новых задач с параметром после девяти вечера не решаю. Вечер — для лёгкого повторения и чистой совести.

☐ Будильник заведён с запасом, завтрак запланирован. Ложусь вовремя: пусть мозг за ночь сам разложит серии корней по окружности.

Заключение, или Честное признание напоследок

Девятиклассникам начать мешало слово «надо». Выпускникам на базе — слово «успеется». Вам мешало слово «не решить» — и теперь вы знаете ему цену: почти каждое «это не для меня» в профиле оказалось названием метода. «Не решить» восемнадцатое — это лесенка из четырёх ступеней. «Не решить» девятнадцатое — четыре результата, из которых первый берётся за минуту. «Не решить» четырнадцатое — три строчки по признаку.

Признание вот в чём: страшным этот экзамен делает не математика, а расстояние до неё. Стоит подойти вплотную — и у чудовища обнаруживаются прейскурант, регламент и вполне договороспособный характер. Эксперт начисляет. Границы проверяются. Методы имеют имена. Всё остальное — тренировка, а тренировка — это то, что у вас теперь есть где взять.

Идите решайте. Икс дождался — теперь ваша очередь.

Источники

Нумерация и критерии опираются на утверждённые материалы ФИПИ для ЕГЭ-2027. При подборе типов сверялись доступные варианты разных лет. Условия с решениями, задания для самопроверки и рисунки для них составлены для книги.

- ФИПИ. Демоверсия, спецификация и кодификатор ЕГЭ-2027 и Открытый банк заданий.
- Под редакцией И. В. Ященко. Математика. Профильный уровень. 36 типовых вариантов ЕГЭ-2027.
- Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухов и соавторы. Тематический тренинг издательства «Легион» и доступные задания из сборников 40 вариантов за 2025 и 2026 годы.
- СтатГрад. Тренировочные и диагностические работы по профильной математике. В редакторской сверке использованы, среди прочих, варианты МА2610109–МА2610112 от 30 сентября 2026 года.