Решения. Вариант 01

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В столбце для диска 14 дюймов наибольшая разрешённая ширина равна 205 мм.
Ответ: 205.

Задание 2

$H = 175 \cdot 0{,}65 = 113{,}75$ мм.
Ответ: $113{,}75$.

Задание 3

Диаметр диска $13 \cdot 25{,}4 = 330{,}2$ мм.
Высота боковины $185 \cdot 0{,}70 = 129{,}5$ мм.
$D = 330{,}2 + 2 \cdot 129{,}5 = 589{,}2$ мм.
Ответ: $589{,}2$.

Задание 4

Диаметры дисков совпадают, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$185 \cdot 0{,}65 - 195 \cdot 0{,}60 = 3{,}25$ мм.
Ответ: $3{,}25$.

Задание 5

Диаметр нового колеса $14 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 185 \cdot 0{,}65 = 596{,}1$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение $\dfrac{596{,}1 - 589{,}2}{589{,}2} \cdot 100\% \approx 1{,}2\%$.
Ответ: $1{,}2$.

Задание 6

$6{,}4 \cdot 2{,}7 = 17{,}28$.
Ответ: $17{,}28$.

Задание 7

$\sqrt{77} \approx 8{,}775$. На рисунке этому числу соответствует точка D. **Ответ:** 4.

Задание 8

$30^5 = 3^5 \cdot 10^5$, поэтому выражение равно $3^2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

$3x + 18 - 2x + 12 = 5$; $x + 30 = 5$; $x = -25$.
Ответ: -25.

Задание 10

Чёрных ручек $(200 - 34 - 28 - 42) : 2 = 48$. Искомая вероятность $(34 + 48) : 200 = 0{,}41$.
Ответ: $0{,}41$.

Задание 11

График А задаётся формулой $y = 1/x$ (1), график Б — формулой $y = x/2$ (3), график В — формулой $y = -x^2 - 2$ (2). **Ответ:** 132.

Задание 12

$R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{288}{6^2} = 8$ Ом.
Ответ: 8.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x \geq -5$, второе — $x \geq -1{,}1$. Их пересечение: $x \geq -1{,}1$. Это рисунок 2.
Ответ: 2.

Задание 14

Прошло $20 : 5 = 4$ периодов полураспада. Масса равна $320 : 2^4 = 20$ мг.
Ответ: 20.

Задание 15

В треугольнике AKC углы KAC и ACK равны $22°$. Поэтому $\angle A = 44°$, а $\angle B = 180° - 44° - 22° = 114°$.
Ответ: 114.

Задание 16

Сторона квадрата равна диаметру окружности: $a = 2 \cdot 6 = 12$. Площадь $S = 12^2 = 144$.
Ответ: 144.

Задание 17

Эти отрезки являются средними линиями двух треугольников. Больший отрезок равен половине большего основания: $14 : 2 = 7$.
Ответ: 7.

Задание 18

По сетке горизонтальное расстояние между точками равно 4, вертикальное — 3. По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Верно утверждение 1 по признаку подобия треугольников. Диагонали ромба равны только у квадрата. Например, тангенс угла $60°$ равен $\sqrt{3} > 1$, поэтому утверждение 3 неверно.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $x \le \dfrac{16}{x}$.

Область допустимых значений: $x \neq 0$. Переносим правую часть влево: $\dfrac{x^2-16}{x} \le 0$.
Получаем $\dfrac{(x-4)(x+4)}{x} \le 0$. Критические точки: -4, 0 и 4.
На четырёх промежутках слева направо знаки выражения: $-$, $+$, $-$, $+$. Нули числителя включаем, ноль знаменателя исключаем. **Ответ:** $(-\infty;-4]\cup(0;4]$.

Задание 21

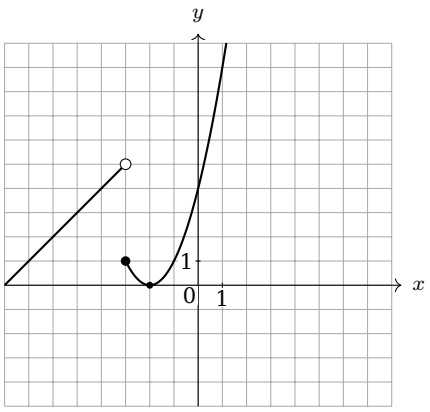
Два велосипедиста одновременно отправились в поездку длиной 180 км. Скорость первого на 3 км/ч больше скорости второго, поэтому первый прибыл на 2 часа раньше. Найдите скорость второго велосипедиста.

Пусть $x > 0$ — скорость второго велосипедиста; скорость первого $x+3$. Время равно расстоянию, делённому на скорость.
$\dfrac{180}{x} - \dfrac{180}{x+3} = 2$. Умножая на $x(x+3) > 0$, получаем $540 = 2x(x+3)$.
$x^2 + 3x - 270 = (x-15)(x+18) = 0$. Корень -18 не имеет физического смысла, поэтому $x = 15$.
Проверка: $180/15 = 12$ ч, $180/18 = 10$ ч; разница 2 ч. **Ответ:** 15 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2+4x+4, & x \ge -3, \\ x+8, & x < -3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

При $x \ge -3$ строим часть параболы $y = (x+2)^2$. Её вершина $(-2;0)$, точка $(-3;1)$ включена. При $x < -3$ строим часть прямой $y = x+8$; точка $(-3;5)$ исключена.
Параболическая часть даёт 0 пересечений при $m < 0$, одно при $m = 0$, два при $0 < m \le 1$ и одно при $m > 1$. Линейная часть даёт ещё одно пересечение ровно при $m < 5$.
Поэтому суммарно: при $m < 0$ одна точка, при $m = 0$ две, при $0 < m \le 1$ три, при $1 < m < 5$ две, при $m \ge 5$ одна. **Ответ:** $m = 0$ или $1 < m < 5$.



Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 8$, $BF = 15$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
Биссектрисы дают $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$, поэтому $\angle AFB = 90^\circ$.
В прямоугольном треугольнике AFB получаем $AB = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.
Ответ: 17.

Задание 24

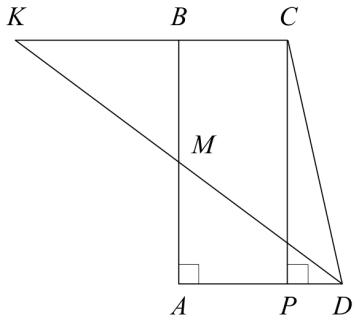
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

У треугольников MBC и MDA общий угол при M. Точка M лежит вне окружности. Для сторон AB и CD вписанного выпуклого четырёхугольника возможны два расположения точек на секущих.
Первый случай: M, B, A и M, C, D. Углы MBC и ABC смежные. Поэтому $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA$, поскольку противоположные углы вписанного четырёхугольника в сумме дают 180°. Лучи DM и DC совпадают, значит, $\angle MDA = \angle CDA = \angle MBC$.
Второй случай: M, A, B и M, D, C. Тогда лучи BM и BA совпадают, поэтому $\angle MBC = \angle ABC$. Углы MDA и CDA смежные, откуда $\angle MDA = 180^\circ - \angle CDA = \angle ABC = \angle MBC$.
В обоих случаях две пары углов равны, следовательно, $\triangle MBC \sim \triangle MDA$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 20$, $CD = 29$, основание $BC = 4$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим биссектрису DM до пересечения с прямой BC в точке K. Точка K лежит на луче CB за B.
Углы CKD и ADK равны при параллельных основаниях, а ADK и KDC равны по свойству биссектрисы. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, остальные равны при параллельных основаниях. Значит, $AD = BK$.
$AD = BK = KC - BC = 29 - 4 = 25$.
Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Четырёхугольник $ABCP$ — параллелограмм, поэтому $CP = AB = 20$, $AP = BC = 4$ и $PD = AD - AP = 21$.
В треугольнике CPD выполняется $20^2 + 21^2 = 29^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна $CP = 20$.
Площадь трапеции $S = \dfrac{25 + 4}{2} \cdot 20 = 290$.



Ответ: 290.

Решения. Вариант 02

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

жилой дом — 3, сарай — 4, баня — 6, теплица — 1. **Ответ:** 3461.

Задание 2

Две вертикальные дорожки имеют площади 10 и 6 м^2, горизонтальная — 12 м^2. Два пересечения по 1 м^2 посчитаны дважды.
Площадь дорожек: $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой: $26+64=90$ м^2, то есть 90 плиток.
В одной упаковке 6 плиток, поэтому нужно 15 упаковок.
Ответ: 15.

Задание 3

Дом занимает прямоугольник размером 5×4 клетки без выреза 3×1 клетку.
Одна клетка соответствует 4 м^2. Площадь $(5\cdot4-3\cdot1)\cdot4=68$ м^2.
Ответ: 68.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Между ними по горизонтали $4\cdot2=8$ м, по вертикали $3\cdot2=6$ м.
Расстояние $\sqrt{8^2+6^2}=10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(27000+21000)-(19000+13000)=16000$ руб.
Газ за час: $1{,}5\cdot8=12$ руб.; электричество: $8\cdot5{,}5=44$ руб.
Экономия за час 32 руб. Срок: $16000:32=500$ ч.
Ответ: 500.

Задание 6

$\dfrac{1}{5}+\dfrac{47}{50}=1{,}14$.
Ответ: $1{,}14$.

Задание 7

Числа в порядке возрастания: $0{,}0137<0{,}021<0{,}03<0{,}103$. Числу $0{,}03$ соответствует точка C. **Ответ:** 3.

Задание 8

$\sqrt{6^4}=\sqrt{(6^2)^2}=6^2=36$.
Ответ: 36.

Задание 9

$5x(x-8)=0$. Корни: 0 и 8. Меньший корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего 20 спортсменов, из России — 12. Вероятность равна $12 : 20 = 0{,}6$.
Ответ: $0{,}6$.

Задание 11

Ветви вверх означают $a > 0$, ветви вниз — $a < 0$. Знак c определяем по положению пересечения графика с осью y. Условиям А, Б, В отвечают графики 3, 2, 1. **Ответ:** 321.

Задание 12

$t_F = 1{,}8 \cdot (-35) + 32 = -31$.
Ответ: -31.

Задание 13

Нули множителей: -6 и 1. Произведение отрицательно между корнями: $-6 < x < 1$. **Ответ:** 4.

Задание 14

За 6 минут температура уменьшилась на $7 \cdot 6 = 42$ градусов. Получаем $-5 - 42 = -47$.
Ответ: -47.

Задание 15

Биссектриса делит угол пополам: $\angle BAD = 36^\circ : 2 = 18^\circ$.
Ответ: 18.

Задание 16

AB — диаметр, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$ и $AB = 26$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Средняя линия равна полусумме оснований: $(6 + 16) : 2 = 11$.
Ответ: 11.

Задание 18

На сетке основание параллелограмма равно 5, высота равна 4. Площадь $S = 5 \cdot 4 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно по определению окружности. Утверждение 2 неверно: для площади нужна полусумма оснований. Утверждение 3 верно: сумма двух меньших сторон меньше третьей. **Ответ:** 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 9(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и разложим разность квадратов: $(x+4)(x-3)(x+3) = 0$.
Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю. **Ответ:** $-4, -3, 3$.

Задание 21

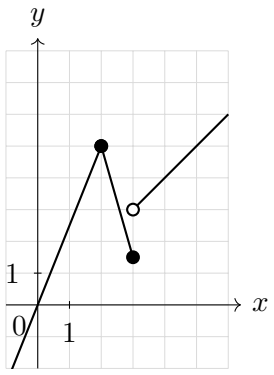
Первые 300 км автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 40 км/ч, а последние 160 км — со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

Время на трёх участках: $300/60 = 5$ ч, $120/40 = 3$ ч и $160/80 = 2$ ч.
Весь путь равен $300 + 120 + 160 = 580$ км, всё время — $5 + 3 + 2 = 10$ ч.
Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{580}{10} = 58$ км/ч.
Ответ: 58.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} \dfrac{5x}{2}, & x < 2, \\ 12 - \dfrac{7x}{2}, & 2 \le x \le 3, \\ x, & x > 3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Строим три части прямых на указанных промежутках. У первого луча точка $(2;5)$ выколота; у среднего отрезка точки $(2;5)$ и $(3;\dfrac{3}{2})$ включены; у последнего луча точка $(3;3)$ выколота.
Первый луч даёт одно пересечение при $m < 5$. Средний отрезок — при $\dfrac{3}{2} \le m \le 5$. Правый луч — при $m > 3$.
При $m < \dfrac{3}{2}$ точка одна; при $\dfrac{3}{2} \le m \le 3$ их две; при $3 < m < 5$ их три; при $m = 5$ их две; при $m > 5$ точка одна.
Ответ: $\dfrac{3}{2} \le m \le 3$ или $m = 5$.



Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6$, $CK = 11$.

Так как $AD \parallel BC$, угол AKB равен углу KAD. По свойству биссектрисы $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, откуда $AB = BK = 6$. Сторона $BC = BK + CK = 17$.
Периметр $P = 2(AB + BC) = 2(6 + 17) = 46$.
Ответ: 46.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Высоты дают прямые углы BB_1C и BC_1C. Поэтому точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу CB_1. Следовательно, они равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 12$, $MD = 6$, а H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Точка D лежит на стороне BC. Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD — высота к гипотенузе. Из подобия треугольников BMD и MCD следует $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку стороны этих углов соответственно перпендикулярны. Следовательно, $\triangle BDH \sim \triangle ADC$.

Из подобия $DH/DC = BD/AD$, поэтому $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{36}{12} = 3$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $H \in AD$. Поэтому $AH = AD - DH = 12 - 3 = 9$.
Ответ: 9.

Решения. Вариант 03

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

яблони — 5, теплица — 1, жилой дом — 3, баня — 6. **Ответ:** 5136.

Задание 2

Вертикальные дорожки занимают 10 и 6 м^2, горизонтальная — 12 м^2. Вычитаем два пересечения по 1 м^2.
Нужно $10 + 6 + 12 - 2 = 26$ плиток.
$26 : 4 = 6{,}5$. Требуется 7 целых упаковок.
Ответ: 7.

Задание 3

Огород занимает $7 \cdot 3 = 21$ клетку, теплица — $3 \cdot 1 = 3$ клетки.
Открытая часть занимает $(21 - 3) \cdot 2^2 = 72$ м^2.
Ответ: 72.

Задание 4

Ближайшие точки — левый край ворот и нижний правый угол сарая.
По горизонтали между ними $4 \cdot 2 = 8$ м, по вертикали $3 \cdot 2 = 6$ м.
Расстояние $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(26000 + 22400) - (18000 + 12000) = 18400$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 8 = 12$ руб.; электричество: $7 \cdot 5 = 35$ руб.
Экономия за час 23 руб. Срок: $18400 : 23 = 800$ ч.
Ответ: 800.

Задание 6

$$\frac{1}{10} + \frac{31}{20} = 1{,}65.$$
Ответ: $1{,}65$.

Задание 7

Числа в порядке возрастания: $-0{,}02 < 0{,}09 < 0{,}098 < 0{,}11$. Числу $0{,}09$ соответствует точка B. **Ответ:** 2.

Задание 8

$\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

$4x(x - 7) = 0$. Корни: 0 и 7. Меньший корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего 10 спортсменов, из Швеции — 2. Вероятность равна $2 : 10 = 0{,}2$.
Ответ: $0{,}2$.

Задание 11

Ветви вверх означают $a > 0$, ветви вниз — $a < 0$. Знак c определяем по положению пересечения графика с осью y. Условиям А, Б, В отвечают графики 3, 2, 1. **Ответ:** 321.

Задание 12

$t_F = 1{,}8 \cdot (-15) + 32 = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 8. Произведение неположительно между корнями, включая границы: $-4 \le x \le 8$. **Ответ:** 3.

Задание 14

За 4 минуты температура уменьшилась на $5 \cdot 4 = 20$ градусов. Получаем $-9 - 20 = -29$.
Ответ: -29.

Задание 15

Биссектриса делит угол пополам: $\angle BAD = 76^\circ : 2 = 38^\circ$.
Ответ: 38.

Задание 16

AB — диаметр, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$ и $AB = 50$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Средняя линия равна полусумме оснований: $(4 + 10) : 2 = 7$.
Ответ: 7.

Задание 18

На сетке основание параллелограмма равно 7, высота равна 6. Площадь $S = 7 \cdot 6 = 42$.
Ответ: 42.

Задание 19

Первое утверждение неверно: равенство углов гарантирует подобие, но не равенство. Утверждения 2 и 3 верны по свойствам параллельных прямых и определению окружности. **Ответ:** 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$.
Вынесем общий множитель и разложим разность квадратов: $(x+3)(x-2)(x+2) = 0$.
Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю. **Ответ:** $-3, -2, 2$.

Задание 21

Первые 240 км автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 40 км/ч, а последние 180 км — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

Время на трёх участках: $240/80 = 3$ ч, $120/40 = 3$ ч и $180/60 = 3$ ч.
Весь путь равен $240 + 120 + 180 = 540$ км, всё время — $3 + 3 + 3 = 9$ ч.

Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{540}{9} = 60$ км/ч.

Ответ: 60.

Задание 22

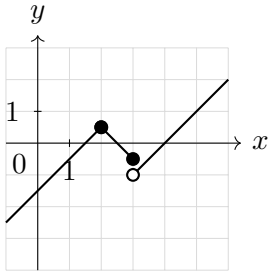
Постройте график функции $y = \begin{cases} x - \dfrac{3}{2}, & x < 2, \\ \dfrac{5}{2} - x, & 2 \le x \le 3, \\ x - 4, & x > 3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Строим три части прямых на указанных промежутках. У первого луча точка $(2; \frac{1}{2})$ выколота; у среднего отрезка точки $(2; \frac{1}{2})$ и $(3; -\frac{1}{2})$ включены; у последнего луча точка $(3; -1)$ выколота.

Первый луч даёт одно пересечение при $m < \dfrac{1}{2}$. Средний отрезок — при $-\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{2}$. Правый луч — при $m > -1$.

При $m \le -1$ точка одна; при $-1 < m < -\dfrac{1}{2}$ их две; при $-\dfrac{1}{2} \le m < \dfrac{1}{2}$ их три; при $m = \dfrac{1}{2}$ их две; при $m > \dfrac{1}{2}$ точка одна.

Ответ: $-1 < m < -\dfrac{1}{2}$ или $m = \dfrac{1}{2}$.



Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 16$.

Так как $AD \parallel BC$, угол AKB равен углу KAD. По свойству биссектрисы $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, откуда $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 21$.
Периметр $P = 2(AB + BC) = 2(5 + 21) = 52$.
Ответ: 52.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1A_1 = \angle CAA_1$.

Высоты дают прямые углы AA_1C и AC_1C. Поэтому точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC.
На этой окружности вписанные углы CC_1A_1 и CAA_1 опираются на одну и ту же дугу CA_1, поэтому равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 15$, $MD = 5$, а H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Точка D лежит на стороне BC. Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD — высота к гипотенузе. Из подобия треугольников BMD и MCD следует $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку стороны этих углов соответственно перпендикулярны. Следовательно, $\triangle BDH \sim \triangle ADC$.

Из подобия $DH/DC = BD/AD$, поэтому $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{15} = \dfrac{5}{3}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $H \in AD$. Поэтому $AH = AD - DH = 15 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{40}{3}$.

Ответ: $\dfrac{40}{3}$.

Решения. Вариант 04

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Коридор — 2, кладовая — 3, спальня — 4, гостиная — 6. **Ответ:** 2346.

Задание 2

Коридор занимает $24 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 125$ клеток.
Его площадь $125 \cdot 0{,}4^2 = 20$ м^2. Одна доска занимает $0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ м^2.
Требуется 250 досок. Число упаковок без округления: $250 : 10 = 25$. Покупают целые упаковки, поэтому нужно 25.
Ответ: 25.

Задание 3

Кладовая занимает $4 \cdot 5 = 20$ клеток.
Площадь $20 \cdot 0{,}4^2 = 3{,}2$ м^2.
Ответ: $3{,}2$.

Задание 4

Кухня занимает $10 \cdot 9 = 90$ клеток, санузел — $5 \cdot 6 = 30$ клеток.
Увеличение относительно санузла: $\dfrac{90 - 30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «600»: $620 + (1200 - 600) \cdot 2 = 1820$ руб.
Тариф «1000»: $840 + (1200 - 1000) \cdot 1{,}5 = 1140$ руб.
Безлимитный тариф стоит 1050 руб. Минимум — 1050 руб.
Ответ: 1050.

Задание 6

$5{,}8 + 8{,}7 = 14{,}5$.
Ответ: $14{,}5$.

Задание 7

$\dfrac{58}{7} \approx 8{,}29$. На координатной прямой этому числу соответствует точка C. **Ответ:** 3.

Задание 8

$a^{17} \cdot a^{-6} : a^9 = a^{17-6-9} = a^2 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

$x + 7 = -0{,}8$, поэтому $x = -7{,}8$.
Ответ: $-7{,}8$.

Задание 10

Чашек с синими цветами $20 - 13 = 7$. Вероятность равна $\dfrac{7}{20} = 0{,}35$.
Ответ: $0{,}35$.

Задание 11

Знак k определяется тем, возрастает или убывает прямая, а знак b — положением её пересечения с осью y.
Ответ: 231.

Задание 12

$C = 6500 + 4200 \cdot 8 = 40100$ руб.
Ответ: 40100.

Задание 13

Получаем $x \le -3{,}6$ и $x \ge -4$. Решение: $[-4; -3{,}6]$.
Ответ: 3.

Задание 14

До 9-го ряда число мест увеличилось 8 раз. Получаем $21 + 4 \cdot (9 - 1) = 53$.
Ответ: 53.

Задание 15

MN — средняя линия, параллельная AC. Поэтому $MN = AC : 2 = 36 : 2 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 16

Вписанный угол ACB и центральный угол AOB опираются на одну дугу. Поэтому $\angle ACB = 82^\circ : 2 = 41^\circ$.
Ответ: 41.

Задание 17

Сторона квадрата равна $2 \cdot 12 = 24$. Площадь равна $24^2 = 576$.
Ответ: 576.

Задание 18

Катеты по клеткам равны 5 и 7. Больший катет равен 7.
Ответ: 7.

Задание 19

Верно первое утверждение: $S = a^2$. Диагональ трапеции с неравными основаниями не делит её на равные треугольники. Равенства только двух сторон недостаточно для равенства треугольников. **Ответ:** 1.

Задание 20

Решите уравнение $x(x^2 + 4x + 4) = 8(x + 2)$.

В левой части выражение в скобках равно $(x + 2)^2$. Переносим всё влево и выносим общий множитель: $(x + 2)(x(x + 2) - 8) = 0$.
Получаем $(x + 2)(x^2 + 2x - 8) = 0$. Квадратный множитель раскладывается как $(x - 2)(x + 4)$.
Таким образом, корни: $-4, -2, 2$. Деления на $x + 2$ не выполняли, поэтому этот корень сохранён.
Ответ: $-4;\ -2;\ 2$.

Задание 21

Поезд движется равномерно со скоростью 68 км/ч. По платформе навстречу ему идёт пешеход со скоростью 4 км/ч. Поезд проходит мимо пешехода за 28 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Скорость поезда относительно пешехода равна сумме скоростей: $68 + 4 = 72$ км/ч.

Переведём её в метры в секунду: $(72) \cdot \dfrac{1000}{3600} = 20$ м/с.

Чтобы весь поезд прошёл мимо пешехода, его начало должно переместиться относительно пешехода на длину поезда. Поэтому $L = 20 \cdot 28 = 560$ м.

Ответ: 560.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+4)(x-3)}{3-x}$. Определите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

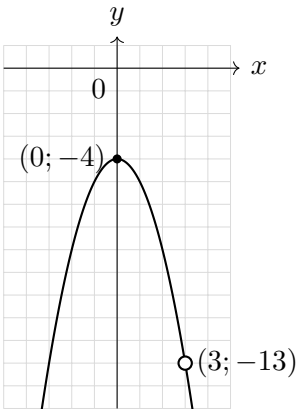
Область определения: $x \neq 3$. Поскольку $x-3 = -(3-x)$, функция равна $y = -x^2-4$ при $x \neq 3$. Строим параболу с вершиной $(0;-4)$ и выколотой точкой $(3;-13)$.

Пересечения с $y = kx$ задаются уравнением $x^2 + kx + 4 = 0$ при $x \neq 3$. Дискриминант $D = k^2 - 16$.

При $D < 0$ точек нет. При $D = 0$ получаем $k = \pm 4$; единственный корень равен $-k/2 = \mp 2$ и не совпадает с 3. Оба значения подходят.

При $D > 0$ два различных корня. Одна точка исчезает только тогда, когда один из корней равен 3: $9+3k+4 = 0$, откуда $k = -\dfrac{13}{3}$. Второй корень по теореме Виета равен $\dfrac{4}{3}$ и допустим.

Ответ: $k = -\dfrac{13}{3};\ -4;\ 4$.



Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 10$, $AC = 30$, $NC = 24$.

Из $MN \parallel AC$ следует равенство соответствующих углов, поэтому $\triangle BMN \sim \triangle BAC$.

Обозначим $BN = x$, тогда $BC = x + 24$. Из подобия $\dfrac{x}{x+24} = \dfrac{10}{30}$.

Получаем $30x = 10(x+24)$, откуда $20x = 240$ и $x = 12$. **Ответ:** 12.

Задание 24

Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания трапеции AD и BC равны a и b, а высота равна h. Так как K — середина боковой стороны, расстояния от K до прямых AD и BC равны $h/2$ (это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям).
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции $(a+b)h/2$.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию и не перекрываются внутренними областями. Следовательно, на KAB приходится вторая половина площади трапеции.

Задание 25

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 6$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 2.

Точка K лежит на биссектрисе угла A, поэтому её расстояния до прямых AB и AD равны. Следовательно, расстояние от K до AD равно 2.
Точка K лежит на биссектрисе угла B, поэтому её расстояния до прямых BA и BC также равны. Расстояние от K до BC равно 2.
Параллельные прямые AD и BC равноудалены от K. Значит, K находится посередине между ними, а расстояние между этими прямыми равно $2 + 2 = 4$.
Это высота параллелограмма к основанию BC. Площадь $S = BC \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$.
Ответ: 24.

Решения. Вариант 05

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4, Камышино — 3, Журавушка — 1, Иваново — 2. **Ответ:** 132.

Задание 2

До поворота 5 клеток, после поворота 12 клеток.
Длина пути $(5+12)\cdot 1=17$ км.
Ответ: 17.

Задание 3

Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12 км.
По теореме Пифагора расстояние $\sqrt{5^2+12^2}=13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах: $\dfrac{11}{22}\cdot 60+\dfrac{13}{13}\cdot 60=30+60=90$.
Ответ: 90.

Задание 5

Васильково: $4\cdot 32+1\cdot 300+2\cdot 440=1308$ руб.
Иваново: $4\cdot 30+1\cdot 320+2\cdot 420=1280$ руб.
Камышино: $4\cdot 35+1\cdot 310+2\cdot 430=1310$ руб.
Журавушка: $4\cdot 31+1\cdot 290+2\cdot 450=1314$ руб.
Наименьшая стоимость — 1280 руб.
Ответ: 1280.

Задание 6

$8{,}7-3{,}4=5{,}3$.
Ответ: $5{,}3$.

Задание 7

$\sqrt{40}\approx 6{,}32$, $\sqrt{46}\approx 6{,}78$, $\sqrt{53}\approx 7{,}28$, $\sqrt{58}\approx 7{,}62$. Положению точки A соответствует $\sqrt{46}$. **Ответ:** 2.

Задание 8

Выражение равно $a^{11+7-14}=a^4=2^4=16$.
Ответ: 16.

Задание 9

$-7x=14$, поэтому $x=-2$.
Ответ: -2.

Задание 10

Искомая вероятность равна $1-0{,}12=0{,}88$.
Ответ: $0{,}88$.

Задание 11

Убывающие прямые имеют $k<0$, возрастающая — $k>0$. Знак b определяем по точке пересечения с осью y.
Ответ: 213.

Задание 12

$R=\dfrac{\alpha}{\omega^2}=\dfrac{12}{4^2}=0{,}75$ м.
Ответ: $0{,}75$.

Задание 13

$|x|>5$, поэтому $x<-5$ или $x>5$. **Ответ:** 1.

Задание 14

В последнем ряду $17+(12-1)\cdot 3=50$ мест. Сумма равна $\dfrac{17+50}{2}\cdot 12=402$.
Ответ: 402.

Задание 15

По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{9^2+12^2}=15$.
Ответ: 15.

Задание 16

Углы DBC и DAC опираются на одну дугу DC, поэтому $\angle DBC=48^\circ$. Значит, $\angle ABC=34^\circ+48^\circ=82^\circ$.
Ответ: 82.

Задание 17

Основание равно $6+9=15$, высота равна 8. Площадь $S=15\cdot 8=120$.
Ответ: 120.

Задание 18

По клеткам $AC=8$. Средняя линия равна половине AC, то есть 4.
Ответ: 4.

Задание 19

Первое утверждение верно: ромб является параллелограммом. Второе неверно: трапеция может быть неравнобедренной. Если бы все углы треугольника были больше 60°, их сумма превысила бы 180°, поэтому третье утверждение верно. **Ответ:** 13.

Задание 20

Найдите значение выражения $27a-9b+19$, если $\dfrac{3a-6b+4}{6a-3b+4}=5$.

Знаменатель $6a-3b+4$ не равен нулю. Умножим равенство на знаменатель: $3a-6b+4=5(6a-3b+4)$.
После раскрытия скобок и переноса слагаемых получаем $27a-9b+16=0$, то есть $27a-9b=-16$.
Искомое выражение равно $-16+19=3$.
Ответ: 3.

Задание 21

Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Первый сделал в пути остановку на 30 минут, после чего продолжил движение до встречи со вторым. Расстояние между городами 174 км. Скорость первого велосипедиста 12 км/ч, второго — 24 км/ч. Найдите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Пусть до встречи прошло t часов. Первый велосипедист двигался $t-\dfrac{1}{2}$ часов, второй — t часов.

Сумма пройденных расстояний равна расстоянию между городами: $12(t-\dfrac{1}{2})+24t=174$.

Отсюда $36t=180$, $t=5$. Второй велосипедист проехал $24\cdot 5=120$ км.

Время движения первого положительно: $5-\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}$ ч. Сумма путей равна 174 км.

Ответ: 120.

Задание 22

Постройте график функции $y=x^2+10x-4|x+6|+24$. Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

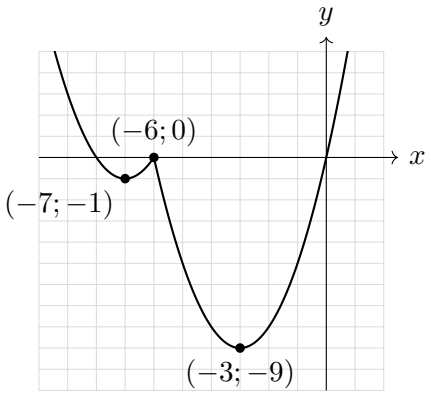
Для исследования положим $t=x+6$. Тогда $y=t^2-2t-4|t|$. При $t<0$ получаем $y=t^2+2t$, при $t\geq 0$ — $y=t^2-6t$.

Левая часть имеет вершину при $t=-1$, её минимальное значение -1. Правая часть имеет вершину при $t=3$, её минимум -9. Обе части встречаются в точке $(x;y)=(-6;0)$.

При $m<-9$ пересечений нет; при $m=-9$ одно; при $-9<m<-1$ два; при $m=-1$ три (вершина левой части и две точки правой).

При $-1<m<0$ пересечений четыре. При $m=0$ они соответствуют $t=-2$, $t=0$, $t=6$, то есть трём разным точкам. При $m>0$ остаётся по одной точке на каждой внешней ветви, всего две.

Ответ: $m=-1$ или $m=0$.



Задание 23

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 7, а одна из диагоналей ромба равна 28. Найдите углы ромба.

Обозначим точку пересечения диагоналей через O, известную диагональ — через AC. Тогда $AO = AC/2 = 14$. Опустим $OT \perp AB$; по условию $OT = 7$.
В прямоугольном треугольнике AOT катет OT равен половине гипотенузы AO. Следовательно, $\angle OAT = 30^\circ$.
Диагональ ромба делит его угол пополам, поэтому $\angle A = 60^\circ$. Противоположный угол C также равен 60°, соседние углы B и D равны 120°.
Ответ: $60^\circ;\ 120^\circ$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

При тупом угле C основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Из подобия следует $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Угол A_1CB_1 равен углу ACB, поскольку образован продолжениями обеих его сторон. Значит, треугольники A_1CB_1 и ACB имеют пропорциональные стороны при равных углах между ними и подобны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Так как $MA = MB = MC = MD$, все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Вписанный четырёхугольник даёт $\angle A = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ и $\angle D = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Треугольник AMB равнобедренный, поэтому $\angle ABM = \angle BAM = 75^\circ$. Аналогично в треугольнике CMD угол $MCD = 60^\circ$.
Отсюда $\angle MBC = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$, $\angle BCM = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$ и $\angle BMC = 90^\circ$.
В прямоугольном равнобедренном треугольнике BMC получаем $BC = MB\sqrt{2}$.
Тогда $AD = 2MB = BC\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.
Ответ: $10\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 06

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В столбце для диска 15 дюймов наибольшая разрешённая ширина равна 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 185 \cdot 0{,}65 = 120{,}25$ мм.
Ответ: $120{,}25$.

Задание 3

Диаметр диска $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины $195 \cdot 0{,}70 = 136{,}5$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 136{,}5 = 628{,}6$ мм.
Ответ: $628{,}6$.

Задание 4

Диаметры дисков совпадают, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$195 \cdot 0{,}65 - 205 \cdot 0{,}60 = 3{,}75$ мм.
Ответ: $3{,}75$.

Задание 5

Диаметр нового колеса $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 195 \cdot 0{,}65 = 634{,}5$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение $\dfrac{634{,}5 - 628{,}6}{628{,}6} \cdot 100\% \approx 0{,}9\%$.
Ответ: $0{,}9$.

Задание 6

$4{,}8 \cdot 3{,}6 = 17{,}28$.
Ответ: $17{,}28$.

Задание 7

$\sqrt{77} \approx 8{,}775$. На рисунке этому числу соответствует точка D. **Ответ:** 4.

Задание 8

$60^4 = 6^4 \cdot 10^4$, поэтому выражение равно $6^2 = 36$.
Ответ: 36.

Задание 9

$3x + 21 - 2x + 14 = 9$; $x + 35 = 9$; $x = -26$.
Ответ: -26.

Задание 10

Чёрных ручек $(200 - 32 - 36 - 44) : 2 = 44$. Искомая вероятность $(32 + 44) : 200 = 0{,}38$.
Ответ: $0{,}38$.

Задание 11

График А задаётся формулой $y = 1/x$ (1), график Б — формулой $y = x/2$ (3), график В — формулой $y = -x^2 - 2$ (2). **Ответ:** 132.

Задание 12

$R = \dfrac{P}{I^2} = \dfrac{121}{5{,}5^2} = 4$ Ом.
Ответ: 4.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x \geq -5$, второе — $x \geq -1{,}1$. Их пересечение: $x \geq -1{,}1$. Это рисунок 2.
Ответ: 2.

Задание 14

Прошло $18 : 6 = 3$ периодов полураспада. Масса равна $240 : 2^3 = 30$ мг.
Ответ: 30.

Задание 15

В треугольнике AKC углы KAC и ACK равны $28°$. Поэтому $\angle A = 56°$, а $\angle B = 180° - 56° - 28° = 96°$.
Ответ: 96.

Задание 16

Сторона квадрата равна диаметру окружности: $a = 2 \cdot 8 = 16$. Площадь $S = 16^2 = 256$.
Ответ: 256.

Задание 17

Эти отрезки являются средними линиями двух треугольников. Больший отрезок равен половине большего основания: $17 : 2 = 8{,}5$.
Ответ: $8{,}5$.

Задание 18

По сетке горизонтальное расстояние между точками равно 4, вертикальное — 3. По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Верно утверждение 1 по признаку подобия треугольников. Диагонали ромба равны только у квадрата. Например, тангенс угла $60°$ равен $\sqrt{3} > 1$, поэтому утверждение 3 неверно.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $x \le \dfrac{25}{x}$.

Область допустимых значений: $x \neq 0$. Переносим правую часть влево: $\dfrac{x^2-25}{x} \le 0$.
Получаем $\dfrac{(x-5)(x+5)}{x} \le 0$. Критические точки: -5, 0 и 5.
На четырёх промежутках слева направо знаки выражения: $-$, $+$, $-$, $+$. Нули числителя включаем, ноль знаменателя исключаем. **Ответ:** $(-\infty;-5]\cup(0;5]$.

Задание 21

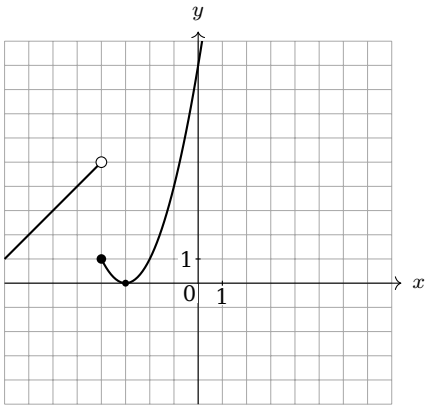
Два велосипедиста проехали по одному маршруту 240 км. Скорость первого на 4 км/ч больше скорости второго, а время движения на 2 часа меньше. Найдите скорость второго велосипедиста.

Пусть $x>0$ — скорость второго. $\dfrac{240}{x}-\dfrac{240}{x+4}=2$.
$960=2x(x+4)$, или $x^2+4x-480=(x-20)(x+24)=0$.
Подходит $x=20$. Проверка: $240/20-240/24=12-10=2$ ч. **Ответ:** 20 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases} x^2+6x+9, & x\ge -4,\\ x+9, & x<-4. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

При $x\ge -4$ строим часть параболы $y=(x+3)^2$. Её вершина $(-3;0)$, точка $(-4;1)$ включена. При $x<-4$ строим часть прямой $y=x+9$; точка $(-4;5)$ исключена.
Параболическая часть даёт 0 пересечений при $m<0$, одно при $m=0$, два при $0<m\le 1$ и одно при $m>1$. Линейная часть даёт ещё одно пересечение ровно при $m<5$.
Поэтому суммарно: при $m<0$ одна точка, при $m=0$ две, при $0<m\le 1$ три, при $1<m<5$ две, при $m\ge 5$ одна. **Ответ:** $m=0$ или $1<m<5$.



Задание 23

Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$, где $AD\parallel BC$, пересекаются в точке F. Длины $AF=7$, $BF=24$. Найдите AB.

$\angle A+\angle B=180^\circ$. Поэтому в треугольнике ABF сумма углов при A и B равна 90°, а угол при F прямой.
$AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{7^2+24^2}=25$.
Ответ: 25.

Задание 24

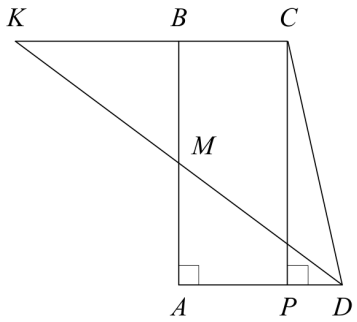
Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

У треугольников MBC и MDA общий угол при M. Точка M лежит вне окружности. Для сторон AB и CD вписанного выпуклого четырёхугольника возможны два расположения точек на секущих.
Первый случай: M, B, A и M, C, D. Углы MBC и ABC смежные. Поэтому $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA$, поскольку противоположные углы вписанного четырёхугольника в сумме дают 180°. Лучи DM и DC совпадают, значит, $\angle MDA = \angle CDA = \angle MBC$.
Второй случай: M, A, B и M, D, C. Тогда лучи BM и BA совпадают, поэтому $\angle MBC = \angle ABC$. Углы MDA и CDA смежные, откуда $\angle MDA = 180^\circ - \angle CDA = \angle ABC = \angle MBC$.
В обоих случаях две пары углов равны, следовательно, $\triangle MBC \sim \triangle MDA$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$ боковые стороны $AB = 12$, $CD = 20$, а основание $BC = 2$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Обозначим середину AB через M. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. Точка K лежит за B, на луче CB.
Углы CKD и ADK равны при параллельных основаниях; углы ADK и KDC равны по свойству биссектрисы. Поэтому $KC = CD = 20$, а $BK = 20 - 2 = 18$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, углы при A и B равны при параллельных основаниях. Отсюда $AD = BK = 18$.
Проведём $CP \parallel AB$, $P \in AD$. Тогда $AP = BC = 2$, $CP = AB = 12$, $PD = 18 - 2 = 16$.
В треугольнике CPD имеем $12^2 + 16^2 = 20^2$. По обратной теореме Пифагора $CP \perp AD$, то есть высота трапеции равна 12. Площадь $S = (18 + 2) \cdot 12/2 = 120$.



Ответ: 120.

Решения. Вариант 07

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

жилой дом — 3, сарай — 4, баня — 6, теплица — 1. **Ответ:** 3461.

Задание 2

Две вертикальные дорожки имеют площади 10 и 6 м^2, горизонтальная — 12 м^2. Два пересечения по 1 м^2 посчитаны дважды.
Площадь дорожек: $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой: $26+64=90$ м^2, то есть 90 плиток.
В одной упаковке 3 плитки, поэтому нужно 30 упаковок.
Ответ: 30.

Задание 3

Дом занимает прямоугольник размером 5×4 клетки без выреза 3×1 клетку.
Одна клетка соответствует 4 м^2. Площадь $(5\cdot4-3\cdot1)\cdot4=68$ м^2.
Ответ: 68.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Между ними по горизонтали $4\cdot2=8$ м, по вертикали $3\cdot2=6$ м.
Расстояние $\sqrt{8^2+6^2}=10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(29000+22100)-(21000+14000)=16100$ руб.
Газ за час: $1{,}2\cdot10=12$ руб.; электричество: $7\cdot5=35$ руб.
Экономия за час 23 руб. Срок: $16100:23=700$ ч.
Ответ: 700.

Задание 6

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{33}{20}=1{,}9$.
Ответ: $1{,}9$.

Задание 7

Числа в порядке возрастания: $0{,}0137<0{,}021<0{,}03<0{,}103$. Числу $0{,}03$ соответствует точка C. **Ответ:** 3.

Задание 8

$\sqrt{8^4}=\sqrt{(8^2)^2}=8^2=64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$7x(x-6)=0$. Корни: 0 и 6. Меньший корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего 20 спортсменов, из России — 9. Вероятность равна $9 : 20 = 0{,}45$.
Ответ: $0{,}45$.

Задание 11

Ветви вверх означают $a > 0$, ветви вниз — $a < 0$. Знак c определяем по положению пересечения графика с осью y. Условиям А, Б, В отвечают графики 3, 2, 1. **Ответ:** 321.

Задание 12

$t_F = 1{,}8 \cdot (-25) + 32 = -13$.
Ответ: -13.

Задание 13

Нули множителей: -6 и 1. Произведение отрицательно между корнями: $-6 < x < 1$. **Ответ:** 4.

Задание 14

За 7 минут температура уменьшилась на $6 \cdot 7 = 42$ градусов. Получаем $-8 - 42 = -50$.
Ответ: -50.

Задание 15

Биссектриса делит угол пополам: $\angle BAD = 44^\circ : 2 = 22^\circ$.
Ответ: 22.

Задание 16

AB — диаметр, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$ и $AB = 34$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Средняя линия равна полусумме оснований: $(5 + 13) : 2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 18

На сетке основание параллелограмма равно 5, высота равна 4. Площадь $S = 5 \cdot 4 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно по определению окружности. Утверждение 2 неверно: для площади нужна полусумма оснований. Утверждение 3 верно: сумма двух меньших сторон меньше третьей. **Ответ:** 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+5) - 4(x+5) = 0$.

Вынесем общий множитель и разложим разность квадратов: $(x+5)(x-2)(x+2) = 0$.

Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю. **Ответ:** $-5, -2, 2$.

Задание 21

Первые 280 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 150 км — со скоростью 50 км/ч, а последние 110 км — со скоростью 55 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

Время на трёх участках: $280/70 = 4$ ч, $150/50 = 3$ ч и $110/55 = 2$ ч.

Весь путь равен $280 + 150 + 110 = 540$ км, всё время — $4 + 3 + 2 = 9$ ч.

Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{540}{9} = 60$ км/ч.

Ответ: 60.

Задание 22

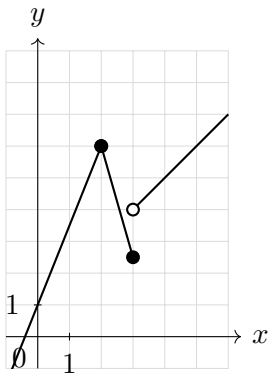
Постройте график функции $y = \begin{cases} \dfrac{5x}{2} + 1, & x < 2, \\ 13 - \dfrac{7x}{2}, & 2 \le x \le 3, \\ x + 1, & x > 3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Строим три части прямых на указанных промежутках. У первого луча точка $(2; 6)$ выколота; у среднего отрезка точки $(2; 6)$ и $(3; \dfrac{5}{2})$ включены; у последнего луча точка $(3; 4)$ выколота.

Первый луч даёт одно пересечение при $m < 6$. Средний отрезок — при $\dfrac{5}{2} \le m \le 6$. Правый луч — при $m > 4$.

При $m < \dfrac{5}{2}$ точка одна; при $\dfrac{5}{2} \le m \le 4$ их две; при $4 < m < 6$ их три; при $m = 6$ их две; при $m > 6$ точка одна.

Ответ: $\dfrac{5}{2} \le m \le 4$ или $m = 6$.



Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 17$.

Так как $AD \parallel BC$, угол AKB равен углу KAD. По свойству биссектрисы $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, откуда $AB = BK = 8$. Сторона $BC = BK + CK = 25$.
Периметр $P = 2(AB + BC) = 2(8 + 25) = 66$.
Ответ: 66.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Высоты дают прямые углы BB_1C и BC_1C. Поэтому точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу CB_1. Следовательно, они равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 18$, $MD = 12$, а H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Точка D лежит на стороне BC. Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD — высота к гипотенузе. Из подобия треугольников BMD и MCD следует $BD \cdot DC = MD^2 = 144$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку стороны этих углов соответственно перпендикулярны. Следовательно, $\triangle BDH \sim \triangle ADC$.
Из подобия $DH/DC = BD/AD$, поэтому $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{144}{18} = 8$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $H \in AD$. Поэтому $AH = AD - DH = 18 - 8 = 10$.
Ответ: 10.

Решения. Вариант 08

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

яблони — 5, теплица — 1, жилой дом — 3, баня — 6. **Ответ:** 5136.

Задание 2

Вертикальные дорожки занимают 10 и 6 м^2, горизонтальная — 12 м^2. Вычитаем два пересечения по 1 м^2.
Нужно $10+6+12-2=26$ плиток.
$26:2=13$. Требуется 13 целых упаковок.
Ответ: 13.

Задание 3

Огород занимает $7\cdot 3=21$ клетку, теплица — $3\cdot 1=3$ клетки.
Открытая часть занимает $(21-3)\cdot 2^2=72$ м^2.
Ответ: 72.

Задание 4

Ближайшие точки — левый край ворот и нижний правый угол сарая.
По горизонтали между ними $4\cdot 2=8$ м, по вертикали $3\cdot 2=6$ м.
Расстояние $\sqrt{8^2+6^2}=10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(30000+25000)-(22000+15000)=18000$ руб.
Газ за час: $1{,}4\cdot 10=14$ руб.; электричество: $8\cdot 5{,}5=44$ руб.
Экономия за час 30 руб. Срок: $18000:30=600$ ч.
Ответ: 600.

Задание 6

$\dfrac{1}{5}+\dfrac{27}{20}=1{,}55$.
Ответ: $1{,}55$.

Задание 7

Числа в порядке возрастания: $-0{,}02<0{,}09<0{,}098<0{,}11$. Числу $0{,}09$ соответствует точка B. **Ответ:** 2.

Задание 8

$\sqrt{7^4}=\sqrt{(7^2)^2}=7^2=49$.
Ответ: 49.

Задание 9

$8x(x-9)=0$. Корни: 0 и 9. Меньший корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего 10 спортсменов, из Швеции — 3. Вероятность равна $3:10=0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

Ветви вверх означают $a > 0$, ветви вниз — $a < 0$. Знак c определяем по положению пересечения графика с осью y. Условиям А, Б, В отвечают графики 3, 2, 1. **Ответ:** 321.

Задание 12

$t_F = 1{,}8 \cdot (-20) + 32 = -4$.
Ответ: -4.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 8. Произведение неположительно между корнями, включая границы: $-4 \le x \le 8$. **Ответ:** 3.

Задание 14

За 5 минут температура уменьшилась на $8 \cdot 5 = 40$ градусов. Получаем $-4 - 40 = -44$.
Ответ: -44.

Задание 15

Биссектриса делит угол пополам: $\angle BAD = 68^\circ : 2 = 34^\circ$.
Ответ: 34.

Задание 16

AB — диаметр, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$ и $AB = 52$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{52^2 - 48^2} = 20$.
Ответ: 20.

Задание 17

Средняя линия равна полусумме оснований: $(3 + 9) : 2 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 18

На сетке основание параллелограмма равно 7, высота равна 6. Площадь $S = 7 \cdot 6 = 42$.
Ответ: 42.

Задание 19

Первое утверждение неверно: равенство углов гарантирует подобие, но не равенство. Утверждения 2 и 3 верны по свойствам параллельных прямых и определению окружности. **Ответ:** 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 6x^2 - 25x - 150 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x + 6) - 25(x + 6) = 0$.
Вынесем общий множитель и разложим разность квадратов: $(x+6)(x-5)(x+5) = 0$.
Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю. **Ответ:** $-6, -5, 5$.

Задание 21

Первые 270 км автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 60 км/ч, а последние 225 км — со скоростью 75 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

Время на трёх участках: $270/90 = 3$ ч, $180/60 = 3$ ч и $225/75 = 3$ ч.
Весь путь равен $270 + 180 + 225 = 675$ км, всё время — $3 + 3 + 3 = 9$ ч.

Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{675}{9} = 75$ км/ч.

Ответ: 75.

Задание 22

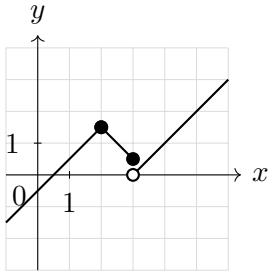
Постройте график функции $y = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}, & x < 2, \\ \dfrac{7}{2} - x, & 2 \le x \le 3, \\ x - 3, & x > 3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Строим три части прямых на указанных промежутках. У первого луча точка $(2;\frac{3}{2})$ выколота; у среднего отрезка точки $(2;\frac{3}{2})$ и $(3;\frac{1}{2})$ включены; у последнего луча точка $(3;0)$ выколота.

Первый луч даёт одно пересечение при $m < \dfrac{3}{2}$. Средний отрезок — при $\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{3}{2}$. Правый луч — при $m > 0$.

При $m \le 0$ точка одна; при $0 < m < \dfrac{1}{2}$ их две; при $\dfrac{1}{2} \le m < \dfrac{3}{2}$ их три; при $m = \dfrac{3}{2}$ их две; при $m > \dfrac{3}{2}$ точка одна.

Ответ: $0 < m < \dfrac{1}{2}$ или $m = \dfrac{3}{2}$.



Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 20$.

Так как $AD \parallel BC$, угол AKB равен углу KAD. По свойству биссектрисы $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, откуда $AB = BK = 7$. Сторона $BC = BK + CK = 27$.
Периметр $P = 2(AB + BC) = 2(7 + 27) = 68$.
Ответ: 68.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1A_1 = \angle CAA_1$.

Высоты дают прямые углы AA_1C и AC_1C. Поэтому точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC.
На этой окружности вписанные углы CC_1A_1 и CAA_1 опираются на одну и ту же дугу CA_1, поэтому равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 20$, $MD = 10$, а H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Точка D лежит на стороне BC. Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD — высота к гипотенузе. Из подобия треугольников BMD и MCD следует $BD \cdot DC = MD^2 = 100$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку стороны этих углов соответственно перпендикулярны. Следовательно, $\triangle BDH \sim \triangle ADC$.

Из подобия $DH/DC = BD/AD$, поэтому $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{100}{20} = 5$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $H \in AD$. Поэтому $AH = AD - DH = 20 - 5 = 15$.
Ответ: 15.

Решения. Вариант 09

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Коридор — 2, кладовая — 3, спальня — 4, гостиная — 6. **Ответ:** 2346.

Задание 2

Коридор занимает $24 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 125$ клеток.
Его площадь $125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ м^2. Одна доска занимает $0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$ м^2.
Требуется 250 досок. Число упаковок без округления: $250 : 8 = 31{,}25$. Покупают целые упаковки, поэтому нужно 32.
Ответ: 32.

Задание 3

Кладовая занимает $4 \cdot 5 = 20$ клеток.
Площадь $20 \cdot 0{,}5^2 = 5$ м^2.
Ответ: 5.

Задание 4

Кухня занимает $10 \cdot 9 = 90$ клеток, санузел — $5 \cdot 6 = 30$ клеток.
Увеличение относительно санузла: $\dfrac{90 - 30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «800»: $690 + (1400 - 800) \cdot 2 = 1890$ руб.
Тариф «1200»: $910 + (1400 - 1200) \cdot 1{,}5 = 1210$ руб.
Безлимитный тариф стоит 1150 руб. Минимум — 1150 руб.
Ответ: 1150.

Задание 6

$7{,}6 + 6{,}9 = 14{,}5$.
Ответ: $14{,}5$.

Задание 7

$\dfrac{58}{7} \approx 8{,}29$. На координатной прямой этому числу соответствует точка C. **Ответ:** 3.

Задание 8

$a^{18} \cdot a^{-7} : a^9 = a^{18-7-9} = a^2 = 49$.
Ответ: 49.

Задание 9

$x + 9 = -0{,}75$, поэтому $x = -9{,}75$.
Ответ: $-9{,}75$.

Задание 10

Чашек с синими цветами $25 - 18 = 7$. Вероятность равна $\dfrac{7}{25} = 0{,}28$.
Ответ: $0{,}28$.

Задание 11

Знак k определяется тем, возрастает или убывает прямая, а знак b — положением её пересечения с осью y.
Ответ: 231.

Задание 12

$C = 7000 + 3900 \cdot 10 = 46000$ руб.
Ответ: 46000.

Задание 13

Получаем $x \le -4{,}2$ и $x \ge -5$. Решение: $[-5; -4{,}2]$.
Ответ: 3.

Задание 14

До 12-го ряда число мест увеличилось 11 раз. Получаем $25 + 2 \cdot (12 - 1) = 47$.
Ответ: 47.

Задание 15

MN — средняя линия, параллельная AC. Поэтому $MN = AC : 2 = 44 : 2 = 22$.
Ответ: 22.

Задание 16

Вписанный угол ACB и центральный угол AOB опираются на одну дугу. Поэтому $\angle ACB = 94^\circ : 2 = 47^\circ$.
Ответ: 47.

Задание 17

Сторона квадрата равна $2 \cdot 15 = 30$. Площадь равна $30^2 = 900$.
Ответ: 900.

Задание 18

Катеты по клеткам равны 5 и 7. Больший катет равен 7.
Ответ: 7.

Задание 19

Верно первое утверждение: $S = a^2$. Диагональ трапеции с неравными основаниями не делит её на равные треугольники. Равенства только двух сторон недостаточно для равенства треугольников. **Ответ:** 1.

Задание 20

Решите уравнение $x(x^2 + 6x + 9) = 10(x + 3)$.

В левой части выражение в скобках равно $(x + 3)^2$. Переносим всё влево и выносим общий множитель: $(x + 3)(x(x + 3) - 10) = 0$.
Получаем $(x + 3)(x^2 + 3x - 10) = 0$. Квадратный множитель раскладывается как $(x - 2)(x + 5)$.
Таким образом, корни: $-5, -3, 2$. Деления на $x + 3$ не выполняли, поэтому этот корень сохранён.
Ответ: $-5;\ -3;\ 2$.

Задание 21

Поезд движется равномерно со скоростью 75 км/ч. По платформе навстречу ему идёт пешеход со скоростью 5 км/ч. Поезд проходит мимо пешехода за 27 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Скорость поезда относительно пешехода равна сумме скоростей: $75 + 5 = 80$ км/ч.

Переведём её в метры в секунду: $(80) \cdot \dfrac{1000}{3600} = \dfrac{200}{9}$ м/с.

Чтобы весь поезд прошёл мимо пешехода, его начало должно переместиться относительно пешехода на длину поезда. Поэтому $L = \dfrac{200}{9} \cdot 27 = 600$ м.

Ответ: 600.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+9)(x-4)}{4-x}$. Определите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

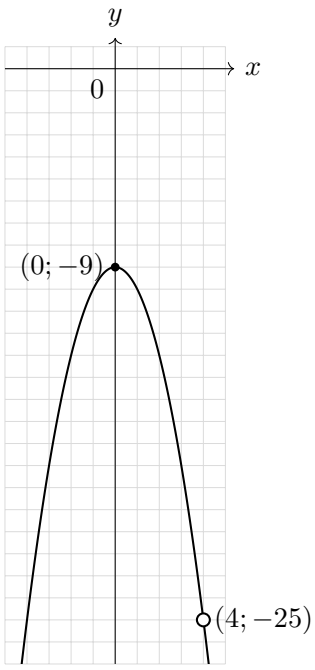
Область определения: $x \neq 4$. Поскольку $x - 4 = -(4 - x)$, функция равна $y = -x^2 - 9$ при $x \neq 4$. Строим параболу с вершиной $(0; -9)$ и выколотой точкой $(4; -25)$.

Пересечения с $y = kx$ задаются уравнением $x^2 + kx + 9 = 0$ при $x \neq 4$. Дискриминант $D = k^2 - 36$.

При $D < 0$ точек нет. При $D = 0$ получаем $k = \pm 6$; единственный корень равен $-k/2 = \mp 3$ и не совпадает с 4. Оба значения подходят.

При $D > 0$ два различных корня. Одна точка исчезает только тогда, когда один из корней равен 4: $16 + 4k + 9 = 0$, откуда $k = -\dfrac{25}{4}$. Второй корень по теореме Виета равен $\dfrac{9}{4}$ и допустим.

Ответ: $k = -\dfrac{25}{4};\ -6;\ 6$.



Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 15$, $AC = 40$, $NC = 25$.

Из $MN \parallel AC$ следует равенство соответствующих углов, поэтому $\triangle BMN \sim \triangle BAC$.

Обозначим $BN = x$, тогда $BC = x + 25$. Из подобия $\dfrac{x}{x+25} = \dfrac{15}{40}$.

Получаем $40x = 15(x + 25)$, откуда $25x = 375$ и $x = 15$. **Ответ:** 15.

Задание 24

Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания трапеции AD и BC равны a и b, а высота равна h. Так как K — середина боковой стороны, расстояния от K до прямых AD и BC равны $h/2$ (это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям).

Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a + b)h/4$, то есть половине площади трапеции $(a + b)h/2$.

Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию и не перекрываются внутренними областями. Следовательно, на KAB приходится вторая половина площади трапеции.

Задание 25

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 8$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 3.

Точка K лежит на биссектрисе угла A, поэтому её расстояния до прямых AB и AD равны. Следовательно, расстояние от K до AD равно 3.

Точка K лежит на биссектрисе угла B, поэтому её расстояния до прямых BA и BC также равны. Расстояние от K до BC равно 3.

Параллельные прямые AD и BC равноудалены от K. Значит, K находится посередине между ними, а расстояние между этими прямыми равно $3 + 3 = 6$.

Это высота параллелограмма к основанию BC. Площадь $S = BC \cdot 6 = 8 \cdot 6 = 48$.

Ответ: 48.

Решения. Вариант 10

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4, Камышино — 3, Журавушка — 1, Иваново — 2. **Ответ:** 132.

Задание 2

До поворота 5 клеток, после поворота 12 клеток.
Длина пути $(5+12)\cdot 2=34$ км.
Ответ: 34.

Задание 3

Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24 км.
По теореме Пифагора расстояние $\sqrt{10^2+24^2}=26$ км.
Ответ: 26.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах: $\dfrac{22}{24}\cdot 60+\dfrac{26}{20}\cdot 60=55+78=133$.
Ответ: 133.

Задание 5

Васильково: $2\cdot 36+3\cdot 340+1\cdot 480=1572$ руб.
Иваново: $2\cdot 38+3\cdot 320+1\cdot 500=1536$ руб.
Камышино: $2\cdot 34+3\cdot 350+1\cdot 470=1588$ руб.
Журавушка: $2\cdot 35+3\cdot 330+1\cdot 490=1550$ руб.
Наименьшая стоимость — 1536 руб.
Ответ: 1536.

Задание 6

$9{,}6-2{,}8=6{,}8$.
Ответ: $6{,}8$.

Задание 7

$\sqrt{40}\approx 6{,}32$, $\sqrt{46}\approx 6{,}78$, $\sqrt{53}\approx 7{,}28$, $\sqrt{58}\approx 7{,}62$. Положению точки A соответствует $\sqrt{46}$. **Ответ:** 2.

Задание 8

Выражение равно $a^{10+8-14}=a^4=4^4=256$.
Ответ: 256.

Задание 9

$-8x=12$, поэтому $x=-1{,}5$.
Ответ: $-1{,}5$.

Задание 10

Искомая вероятность равна $1-0{,}18=0{,}82$.
Ответ: $0{,}82$.

Задание 11

Убывающие прямые имеют $k<0$, возрастающая — $k>0$. Знак b определяем по точке пересечения с осью y.
Ответ: 213.

Задание 12

$R=\dfrac{\alpha}{\omega^2}=\dfrac{20}{5^2}=0{,}8$ м.
Ответ: $0{,}8$.

Задание 13

$|x|>7$, поэтому $x<-7$ или $x>7$. **Ответ:** 1.

Задание 14

В последнем ряду $18+(11-1)\cdot 4=58$ мест. Сумма равна $\dfrac{18+58}{2}\cdot 11=418$.
Ответ: 418.

Задание 15

По теореме Пифагора гипотенуза равна $\sqrt{15^2+20^2}=25$.
Ответ: 25.

Задание 16

Углы DBC и DAC опираются на одну дугу DC, поэтому $\angle DBC=52^\circ$. Значит, $\angle ABC=41^\circ+52^\circ=93^\circ$.
Ответ: 93.

Задание 17

Основание равно $9+11=20$, высота равна 12. Площадь $S=20\cdot 12=240$.
Ответ: 240.

Задание 18

По клеткам $AC=8$. Средняя линия равна половине AC, то есть 4.
Ответ: 4.

Задание 19

Первое утверждение верно: ромб является параллелограммом. Второе неверно: трапеция может быть неравнобедренной. Если бы все углы треугольника были больше 60°, их сумма превысила бы 180°, поэтому третье утверждение верно. **Ответ:** 13.

Задание 20

Найдите значение выражения $21a-6b+17$, если $\dfrac{3a-6b+4}{6a-3b+4}=4$.

Знаменатель $6a-3b+4$ не равен нулю. Умножим равенство на знаменатель: $3a-6b+4=4(6a-3b+4)$.

После раскрытия скобок и переноса слагаемых получаем $21a-6b+12=0$, то есть $21a-6b=-12$.

Искомое выражение равно $-12+17=5$.
Ответ: 5.

Задание 21

Из двух городов одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Первый сделал в пути остановку на 24 минуты, после чего продолжил движение до встречи со вторым. Расстояние между городами 234 км. Скорость первого велосипедиста 15 км/ч, второго — 25 км/ч. Найдите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Пусть до встречи прошло t часов. Первый велосипедист двигался $t-\dfrac{2}{5}$ часов, второй — t часов.

Сумма пройденных расстояний равна расстоянию между городами: $15(t-\dfrac{2}{5})+25t=234$.

Отсюда $40t=240$, $t=6$. Второй велосипедист проехал $25\cdot 6=150$ км.

Время движения первого положительно: $6-\dfrac{2}{5}=\dfrac{28}{5}$ ч. Сумма путей равна 234 км.

Ответ: 150.

Задание 22

Постройте график функции $y=x^2+8x-5|x+5|+15$. Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

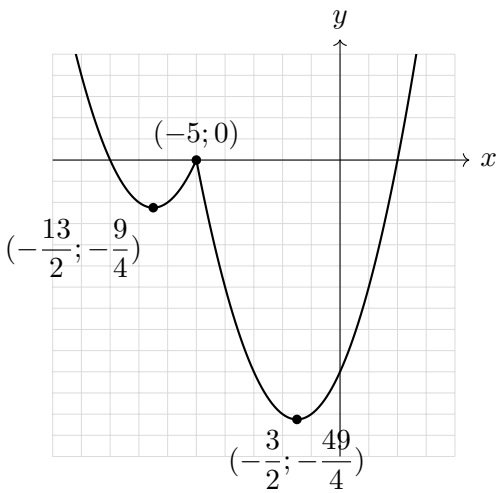
Для исследования положим $t=x+5$. Тогда $y=t^2-2t-5|t|$. При $t<0$ получаем $y=t^2+3t$, при $t\ge 0$ — $y=t^2-7t$.

Левая часть имеет вершину при $t=-\dfrac{3}{2}$, её минимальное значение $-\dfrac{9}{4}$. Правая часть имеет вершину при $t=\dfrac{7}{2}$, её минимум $-\dfrac{49}{4}$. Обе части встречаются в точке $(x;y)=(-5;0)$.

При $m<-\dfrac{49}{4}$ пересечений нет; при $m=-\dfrac{49}{4}$ одно; при $-\dfrac{49}{4}<m<-\dfrac{9}{4}$ два; при $m=-\dfrac{9}{4}$ три (вершина левой части и две точки правой).

При $-\dfrac{9}{4}<m<0$ пересечений четыре. При $m=0$ они соответствуют $t=-3$, $t=0$, $t=7$, то есть трём разным точкам. При $m>0$ остаётся по одной точке на каждой внешней ветви, всего две.

Ответ: $m=-\dfrac{9}{4}$ или $m=0$.



Задание 23

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 11, а одна из диагоналей ромба равна 44. Найдите углы ромба.

Обозначим точку пересечения диагоналей через O, известную диагональ — через AC. Тогда $AO = AC/2 = 22$. Опустим $OT \perp AB$; по условию $OT = 11$.
В прямоугольном треугольнике AOT катет OT равен половине гипотенузы AO. Следовательно, $\angle OAT = 30^\circ$.
Диагональ ромба делит его угол пополам, поэтому $\angle A = 60^\circ$. Противоположный угол C также равен 60°, соседние углы B и D равны 120°.
Ответ: $60^\circ;\ 120^\circ$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

При тупом угле C основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Из подобия следует $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Угол A_1CB_1 равен углу ACB, поскольку образован продолжениями обеих его сторон. Значит, треугольники A_1CB_1 и ACB имеют пропорциональные стороны при равных углах между ними и подобны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 9$, $\angle B = 130^\circ$, $\angle C = 110^\circ$.

Так как $MA = MB = MC = MD$, все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Вписанный четырёхугольник даёт $\angle A = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ и $\angle D = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.
Треугольник AMB равнобедренный, поэтому $\angle ABM = \angle BAM = 70^\circ$. Аналогично в треугольнике CMD угол $MCD = 50^\circ$.
Отсюда $\angle MBC = 130^\circ - 70^\circ = 60^\circ$, $\angle BCM = 110^\circ - 50^\circ = 60^\circ$ и $\angle BMC = 60^\circ$.
Треугольник BMC равносторонний, поэтому $MB = BC = 9$. Диаметр $AD = 2MB = 18$.
Ответ: 18.

Решения. Вариант 11

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Берёзовка — 1; Сосновка — 3; Озёрное — 2.
Ответ: 132.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $4+5+12=21$ км.
Ответ: 21.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 9 и 12 км.
Её длина $\sqrt{9^2+12^2}=15$ км.
Ответ: 15.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 4 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 13 км.
Время: $\dfrac{4}{60}\cdot 60+\dfrac{13}{40}\cdot 60=23{,}5$ мин.
Ответ: 23,5.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{21\cdot 6{,}5}{100}\cdot 55=75{,}075$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{15\cdot 8}{100}\cdot 55=66$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{4\cdot 6{,}5+13\cdot 8}{100}\cdot 55=71{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — 66 руб.
Ответ: 66.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{10}=-\dfrac{11}{20}$.
Умножаем на 3 и получаем $-1{,}65$.
Ответ: $-1{,}65$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{221}$ приблизительно равно $14{,}866$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$16+3=19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 4$. Из равенства получаем $x-(4)=-\dfrac{13}{4}$.
$x = 0{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-13 \neq 0$.
Ответ: $0{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $36 + 44 + 20 = 100$. Благоприятных исходов 44, поэтому вероятность равна $\dfrac{44}{100} = 0{,}44$.
Ответ: $0{,}44$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = x + 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{-2}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 1$.
Ответ: 312.

Задание 12

Подставляем $F = -13$: $C = \dfrac{5}{9}(-13 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-45) = -25$.
Ответ: -25.

Задание 13

$121 = 11^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 11.
Множество решений: $(-\infty; -11] \cup [11; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 6 \cdot 2^4 = 96$.
Ответ: 96.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$. Длина положительна, поэтому $BC = 20$.
Ответ: 20.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52 : 2 = 26$. Вторая сторона: $26 - 15 = 11$.
Площадь равна $15 \cdot 11 = 165$.
Ответ: 165.

Задание 18

Основания равны 2 и 5, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{2+5}{2} \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-16}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-16 = (x-4)(x+4)$.
Критические точки: -4, 1, 4. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -4 и 4 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-4] \cup (1;4]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $2{,}4$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 2 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+2$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+2)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{5}{12}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+2) = \dfrac{12}{5}(2x+2)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 4$ и $x = -\dfrac{6}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

Проверка: $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{12}$, поэтому время совместной работы равно $2{,}4$ ч.

Ответ: 4 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+2)(x^2+6x+5)}{x+2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

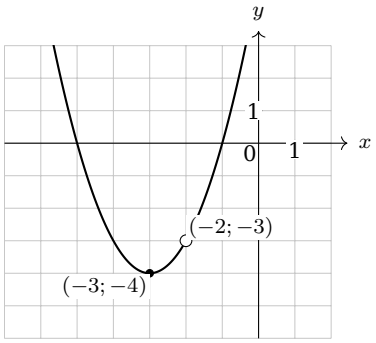
Функция определена при $x \neq -2$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$.

Строим параболу с вершиной $(-3; -4)$ и выколотой точкой $(-2; -3)$.

При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 3$, $CK = 5$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 3$. Сторона $BC = BK + CK = 8$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(3 + 8) = 22$.

Ответ: 22.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.

На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 4$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 4$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 4^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 25$. Поэтому $R = \dfrac{25}{6}$.

Ответ: $\dfrac{25}{6}$.

Решения. Вариант 12

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

$V = 3 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}1 = 15{,}12$ м^3.
Ответ: 15,12.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $18 : 2 = 9$ см и 12 см.
$R = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ см.
Ответ: 15.

Задание 4

После скидки остаётся 90% цены. Получаем $28000 \cdot \dfrac{90}{100} = 25200$ руб.
Ответ: 25200.

Задание 5

Объём парной равен $15{,}12$ м^3. Подходят печи № 1, 2, 3.
Печь № 1: $22000 + 700 = 22700$ руб.
Печь № 2: $28000 + 700 = 28700$ руб.
Печь № 3: $24000 + 700 + 4500 = 29200$ руб.
Наименьшая сумма — 22700 руб.
Ответ: 22700.

Задание 6

Сумма в скобках равна $8{,}9$.
$8{,}9 : 0{,}5 = 17{,}8$.
Ответ: 17,8.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{457}$ приблизительно равно $-21{,}378$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{2\cdot 2-2} = 3^2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

$2x = -21 - (-6) = -15$, поэтому $x = -7{,}5$.
Ответ: $-7{,}5$.

Задание 10

На 7 делятся числа $7, 14, \ldots, 49$; их 7. Вероятность равна $\dfrac{7}{50} = 0{,}14$.
Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -3x$.
График Б: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 136}{6+28} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 13

Получаем $-5x > -5$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 1)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{19} = 12 + (19-1) \cdot (4) = 84$.
Ответ: 84.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 29° - 69° = 82°$.
Ответ: 82.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 102° : 2 = 51°$.
Ответ: 51.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{22 + 12}{2} \cdot 7 = 119$.
Ответ: 119.

Задание 18

Основание равно 4, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 4 \cdot 5 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 9(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-9) = (x+2)(x-3)(x+3) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-3;\ -2;\ 3$.
Ответ: $-3;\ -2;\ 3$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 10 км/ч, второго 12 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $41{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $10(t - \dfrac{1}{4}) + 12t = \dfrac{83}{2}$. Отсюда $22t = 44$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $12 \cdot 2 = 24$ км. Время движения первого $\dfrac{7}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 24 км.

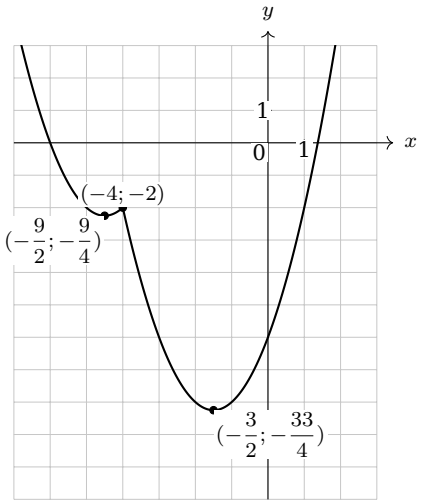
Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 6x + 6 - 3|x + 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 2$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.

При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 3$, $AC = 6$, $NC = 6$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 6$. По подобию $\frac{x}{x+6} = \frac{3}{6}$.

Отсюда $6x = 3(x + 6)$, то есть $3x = 18$. Получаем $BN = 6$.

Ответ: 6.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.
В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{18}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 5 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{7}{5}$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны.
Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 6 \cdot \dfrac{\frac{7}{5}}{5} = \dfrac{42}{25}$.

Ответ: $\dfrac{42}{25}$.

Решения. Вариант 13

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{4+8+6+10}{4} = 7$ ГБ.
Ответ: 7.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 0 ГБ.
Плата: $450 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 450$ руб.
Ответ: 450.

Задание 5

За месяц № 4 использовано 250 минут и 10 ГБ.
«Основной»: $450 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 450$ руб.
«Расширенный»: $650 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 650$ руб.
Наименьшая плата — 450 руб.
Ответ: 450.

Задание 6

$(-6)^2 = 36$, $11^2 = 121$. Поэтому значение выражения равно $36 - 121 = -85$.
Ответ: -85.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{202}{17}$ приблизительно равно $11{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $10 + 2\sqrt{70} + 7 - 2\sqrt{70} = 17$.
Ответ: 17.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-1)(x-4) = 0$. Корни: 1 и 4.
Требуемый корень равен 4.
Ответ: 4.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 11 = 189$. Вероятность равна $\frac{189}{200} = 0{,}945$.
Ответ: $0{,}945$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{16{,}8 \cdot 28}{28 - 16{,}8} = 42$ Ом.
Ответ: 42.

Задание 13

Нули множителей: -5 и 4. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-5; 4)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 23-го ряда число мест увеличивается 22 раз: $14 + 22 \cdot 2 = 58$.
Ответ: 58.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$, поэтому каждый равен 72°.
Ответ: 72.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 3 и 4, поэтому площадь равна $3 \cdot 4 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{3}{x-4}+\frac{3}{x+4}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 4$ и $x\neq -4$.
Умножим уравнение на $(x-4)(x+4)$: $3(x+4)+3(x-4)=x^2-16$.
Получим $x^2-6x-16=0$, или $(x-3)^2=25=5^2$.
Поэтому $x=3-5=-2$ или $x=3+5=8$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-2;\ 8$.

Задание 21

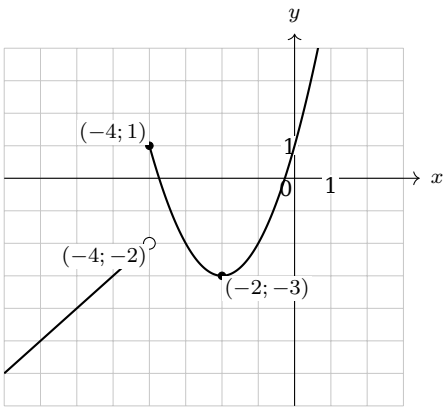
Имеются два сплава с содержанием меди 10% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{10}{100}x+\frac{65}{100}(50-x)=\frac{35}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $10x+3250-65x=1750$. Поэтому $55x=1500$ и $x=\frac{300}{11}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{300}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x+2)^2 - 3, & x \geq -4, \\ x + 2, & x < -4. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2; -3)$, оставленная при $x \geq -4$. Точка $(-4; 1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < -4$. Его конечная точка $(-4; -2)$ выколота.
При $m < -3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3 < m < -2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-2 \leq m \leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(-4; 1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -3$ или $-2 \leq m \leq 1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 5, а основание равно 6. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \dfrac{25}{8}$.
Ответ: $\dfrac{25}{8}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 12$, $CD = 13$, основание $BC = 4$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 13 - 4 = 9$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 12$, $AP = BC = 4$, $PD = AD - BC = 5$.
В треугольнике CPD выполняется $12^2 + 5^2 = 13^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 12.
Площадь $S = \dfrac{9+4}{2} \cdot 12 = 78$.
Ответ: 78.

Решения. Вариант 14

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А2 — размеры № 1, А4 — размеры № 2, А6 — размеры № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 70 \cdot 250}{1000} = 1{,}091475$ кг.
После округления получаем $1{,}1$ кг.
Ответ: 1,1.

Задание 5

Всего нужно $620 \cdot 2 = 1240$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1240}{250} \right\rceil = 5$.
Стоимость: $5 \cdot 280 = 1400$ руб.
Ответ: 1400.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{10} - \dfrac{17}{4} = -\dfrac{43}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $-4{,}3$.
Ответ: $-4{,}3$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{356}$ приблизительно равно $18{,}868$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$17 + 1 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -4$. Из равенства получаем $x - (-4) = -4$.
$x = -8$. Это значение допустимо, так как числитель $-16 \neq 0$.
Ответ: -8.

Задание 10

Всего шаров $4+3+33 = 40$. Благоприятных исходов 3, поэтому вероятность равна $\dfrac{3}{40} = 0{,}075$.
Ответ: $0{,}075$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{-1}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 192}{8^2} = 6$ кг.
Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -7$, второе — $x \leq -1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-7; -1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 5 \cdot 2^3 = 40$.
Ответ: 40.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36^2 + 15^2 = 1521$. Длина положительна, поэтому $BC = 39$.
Ответ: 39.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 9 \cdot 11 = 99$.
Ответ: 99.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 4 и 3. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 3 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 10t + 9 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 9) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 9$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 9$ — $x = \pm 3$.
Ответ: $-3;\ -1;\ 1;\ 3$.

Задание 21

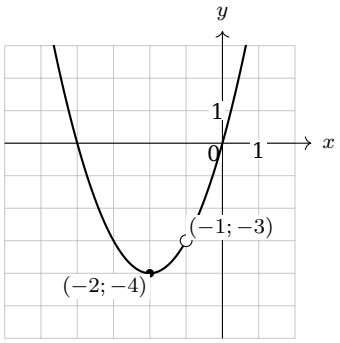
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 40 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{40}{x} - \dfrac{40}{x + 2} = 1$. Умножив на $x(x + 2)$, получаем $80 = 1x(x + 2)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 8)(x + 10) = 0$.
Корень $x = -10$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 8 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 8 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+4x)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2+4x = (x+2)^2-4$.
Строим параболу с вершиной $(-2;-4)$ и выколотой точкой $(-1;-3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 4 и 9. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $4 + 9 = 13$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 13 \cdot 4$ и $v^2 = 13 \cdot 9$.
Поэтому $u = 2\sqrt{13}$, $v = 3\sqrt{13}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 13 + 5\sqrt{13}$.
Ответ: $13 + 5\sqrt{13}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 5$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$.
Ответ: $\frac{16}{5}$.

Решения. Вариант 15

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Сосновка — 3; Луговое — 1; Берёзовка — 2.
Ответ: 312.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $11 + 5 + 12 = 28$ км.
Ответ: 28.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12 км.
Её длина $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 11 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 13 км.
Время: $\dfrac{11}{75} \cdot 60 + \dfrac{13}{50} \cdot 60 = 24{,}4$ мин.
Ответ: 24,4.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{28 \cdot 7}{100} \cdot 57 = 111{,}72$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{20 \cdot 9}{100} \cdot 57 = 102{,}6$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{11 \cdot 7 + 13 \cdot 9}{100} \cdot 57 = 110{,}58$ руб.

Наименьшая стоимость — $102{,}6$ руб.
Ответ: 102,6.

Задание 6

Сумма в скобках равна $13{,}8$.
$13{,}8 : 0{,}4 = 34{,}5$.
Ответ: 34,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{79}$ приблизительно равно $-8{,}888$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{3 \cdot 2 - 4} = 2^2 = 4$.
Ответ: 4.

Задание 9

$8x = -65 - (19) = -84$, поэтому $x = -10{,}5$.
Ответ: $-10{,}5$.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 99$; их 11. Вероятность равна $\dfrac{11}{100} = 0{,}11$.

Ответ: $0{,}11$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = -2x - 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 59$: $C = \dfrac{5}{9}(59 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (27) = 15$.

Ответ: 15.

Задание 13

$196 = 14^2$. Требуются числа, модуль которых больше 14.
Множество решений: $(-\infty; -14) \cup (14; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_7 = 23 + (7-1) \cdot (5) = 53$.
Ответ: 53.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 66° - 34° = 80°$.
Ответ: 80.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 60 : 2 = 30$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $54 : 2 = 27$. Вторая сторона: $27 - 17 = 10$.
Площадь равна $17 \cdot 10 = 170$.
Ответ: 170.

Задание 18

Основание занимает 5 клеток, высота — 2 клеток. Площадь равна $\dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$.

Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 3 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-4, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-4-x$. Подставим во второе: $x^2+(-4-x)^2=10$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+4x+3=0$.
Разложим на множители: $(x+3)(x+1)=0$. Следовательно, $x=-3$ или $x=-1$.
При $x=-3$ первое уравнение даёт $y=-1$; при $x=-1$ получаем $y=-3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -4, сумма их квадратов равна 10.
Ответ: $(x;y)=(-3;-1)$ или $(x;y)=(-1;-3)$.

Задание 21

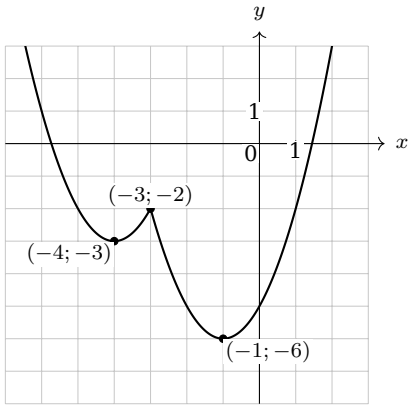
Моторная лодка прошла 28 км по течению реки и 10 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>2$. Скорости по течению и против течения равны $x+2$ и $x-2$.
Уравнение времени: $\dfrac{28}{x+2}+\dfrac{10}{x-2}=3$.
После умножения на $(x+2)(x-2)$ и приведения получаем $3x^2-38x+24=0$. Его корни: $x=12$ и $x=\dfrac{2}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>2$. Для $x=12$ времена равны 2 ч и 1 ч, их сумма 3 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 5x + 4 - 3|x + 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 4t - 2$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; -3)$ и $(2; -6)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -6$ пересечений нет; при $m = -6$ одно; при $-6 < m < -3$ два; при $m = -3$ три.
При $-3 < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -3$ или $m = -2$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 3$, $BF = 4$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 5$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{5}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 5/\cos 30^\circ = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Решения. Вариант 16

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

$V = 3{,}1 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}1 = 16{,}275$ м^3.
Ответ: 16,275.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $24 : 2 = 12$ см и 16 см.
$R = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ см.
Ответ: 20.

Задание 4

После скидки остаётся 88% цены. Получаем $28600 \cdot \dfrac{88}{100} = 25168$ руб.
Ответ: 25168.

Задание 5

Объём парной равен $16{,}275$ м^3. Подходят печи № 1, 2, 3.
Печь № 1: $22500 + 750 = 23250$ руб.
Печь № 2: $28600 + 750 = 29350$ руб.
Печь № 3: $24400 + 750 + 4650 = 29800$ руб.
Наименьшая сумма — 23250 руб.
Ответ: 23250.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $3^2 = 9$. Поэтому значение выражения равно $25 - 9 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{166}{11}$ приблизительно равно $15{,}091$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $10 + 2\sqrt{110} + 11 - 2\sqrt{110} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 3)(x - 5) = 0$. Корни: -3 и 5.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 23 = 477$. Вероятность равна $\dfrac{477}{500} = 0{,}954$.

Ответ: $0{,}954$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 108}{11 + 25} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $2x \geq 14$. Делим на 2, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $[7; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $19 + 20 \cdot 3 = 79$.
Ответ: 79.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$, поэтому каждый равен 69°.
Ответ: 69.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 66^\circ : 2 = 33^\circ$.
Ответ: 33.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{16 + 7}{2} \cdot 14 = 161$.
Ответ: 161.

Задание 18

Основания равны 3 и 8, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{3 + 8}{2} \cdot 2 = 11$.

Ответ: 11.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-25}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-25 = (x-5)(x+5)$.
Критические точки: -5, 1, 5. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -5 и 5 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-5]\cup(1;5]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 4 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 6 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

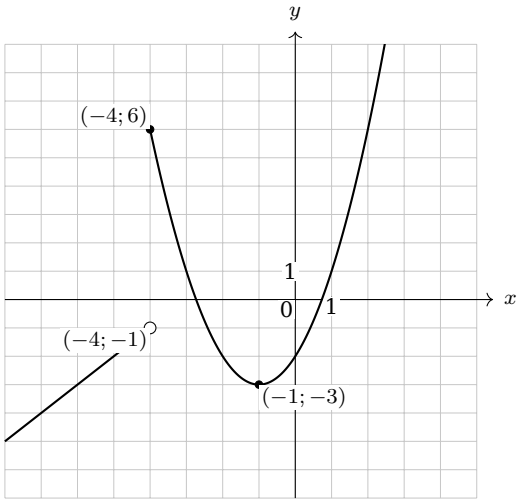
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+6$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+6)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{4}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+6) = 4(2x+6)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 6$ и $x = -4$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$, поэтому время совместной работы равно 4 ч.
Ответ: 6 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2-3, & x\geq -4,\\ x+3, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;-3)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;6)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+3$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;-1)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1\leq m\leq 6$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>6$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 6 включена, поскольку точка $(-4;6)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-1\leq m\leq 6$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=4$, $CK=6$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=4$. Сторона $BC=BK+CK=10$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(4+10)=28$.
Ответ: 28.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 4$, $BC = 6$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 6$ и $BH = AC = 4$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 4|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-4)^2 + 6^2$.

После раскрытия скобок получаем $8R = 52$. Поэтому $R = \dfrac{13}{2}$.

Ответ: $\dfrac{13}{2}$.

Решения. Вариант 17

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 9.
Ответ: 9.

Задание 2

Лимит равен 350 минутам. Он превышен в месяцах № 4, 6, 7, 9, 10, 11.
Всего таких месяцев — 6.
Ответ: 6.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{12+14+8+16}{4} = 12{,}5$ ГБ.
Ответ: $12{,}5$.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 12 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 150 минут и 0 ГБ.
Плата: $460 + 150 \cdot 2 + 0 \cdot 65 = 760$ руб.
Ответ: 760.

Задание 5

За месяц № 11 использовано 600 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $460 + 250 \cdot 2 + 0 \cdot 65 = 960$ руб.
«Расширенный»: $665 + 100 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 865$ руб.
Наименьшая плата — 865 руб.
Ответ: 865.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{8} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{79}{40}$.
Умножаем на 2 и получаем $3{,}95$.
Ответ: $3{,}95$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{32}$ приблизительно равно $5{,}657$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$22 + 2 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 12$. Из равенства получаем $x - (12) = -\frac{7}{2}$.
$x = 8{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-28 \neq 0$.
Ответ: $8{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $13 + 35 + 2 = 50$. Благоприятных исходов 35, поэтому вероятность равна $\frac{35}{50} = 0{,}7$.
Ответ: $0{,}7$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{1}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{9{,}6 \cdot 16}{16 - 9{,}6} = 24$ Ом.
Ответ: 24.

Задание 13

Нули множителей: -11 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-11; 1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 8 \cdot 2^4 = 128$.
Ответ: 128.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36^2 + 15^2 = 1521$. Длина положительна, поэтому $BC = 39$.
Ответ: 39.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{24 \cdot 20}{2} = 240$.

Ответ: 240.

Задание 18

Основание равно 5, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 5 \cdot 6 = 30$.

Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.

Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.

Утверждение 3 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.

Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+3) - 16(x+3) = 0$.

Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+3)(x^2-16) = (x+3)(x-4)(x+4) = 0$.

Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-4;\ -3;\ 4$.

Ответ: $-4;\ -3;\ 4$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 11 км/ч, второго 15 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками $46{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $11(t - \dfrac{1}{2}) + 15t = \dfrac{93}{2}$. Отсюда $26t = 52$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $15 \cdot 2 = 30$ км. Время движения первого $\dfrac{3}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.

Ответ: 30 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+2x-3)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

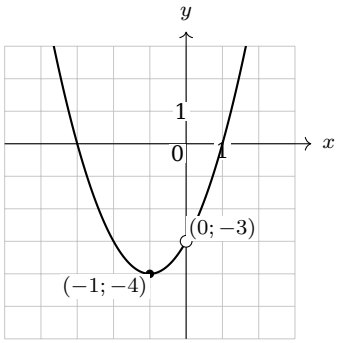
Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$.

Строим параболу с вершиной $(-1; -4)$ и выколотой точкой $(0; -3)$.

При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 4$, $AC = 12$, $NC = 7$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 7$. По подобию $\dfrac{x}{x+7} = \dfrac{4}{12}$.

Отсюда $12x = 4(x+7)$, то есть $8x = 28$. Получаем $BN = \dfrac{7}{2}$.

Ответ: $\dfrac{7}{2}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.

Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.

Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 13$, $BC = 10$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{50}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 13 - \dfrac{50}{13} = \dfrac{119}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 10 \cdot \dfrac{\frac{119}{13}}{13} = \dfrac{1190}{169}$.

Ответ: $\dfrac{1190}{169}$.

Решения. Вариант 18

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 1, А2 — размеры № 3, А4 — размеры № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

При переходе от А1 к А5 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны 21 см и $29{,}7$ см.
Площадь $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ см^2.
Ответ: 623,7.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 80 \cdot 250}{1000} = 1{,}2474$ кг.
После округления получаем $1{,}2$ кг.
Ответ: 1,2.

Задание 5

Всего нужно $655 \cdot 3 = 1965$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1965}{250} \right\rceil = 8$.
Стоимость: $8 \cdot 300 = 2400$ руб.
Ответ: 2400.

Задание 6

Сумма в скобках равна $13{,}9$.
$13{,}9 : 0{,}8 = 17{,}375$.
Ответ: 17,375.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{153}$ приблизительно равно $-12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{4 \cdot 2 - 5} = 4^3 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$8x = -100 - (0) = -100$, поэтому $x = -12{,}5$.
Ответ: $-12{,}5$.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 45$; их 5. Вероятность равна $\dfrac{5}{50} = 0{,}1$.

Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -3x$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = 3x + 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 250}{10^2} = 5$ кг.

Ответ: 5.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -6$, второе — $x \le 3$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-6; 3]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{20} = -15 + (20-1) \cdot (2) = 23$.
Ответ: 23.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 51° - 36° = 93°$.
Ответ: 93.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 13 \cdot 7 = 91$.
Ответ: 91.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 7, поэтому площадь равна $4 \cdot 7 = 28$.
Ответ: 28.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{5}{x-12}+\frac{5}{x+12}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 12$ и $x \neq -12$.
Умножим уравнение на $(x-12)(x+12)$: $5(x+12)+5(x-12)=x^2-144$.
Получим $x^2-10x-144=0$, или $(x-5)^2=169=13^2$.
Поэтому $x=5-13=-8$ или $x=5+13=18$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-8;\ 18$.

Задание 21

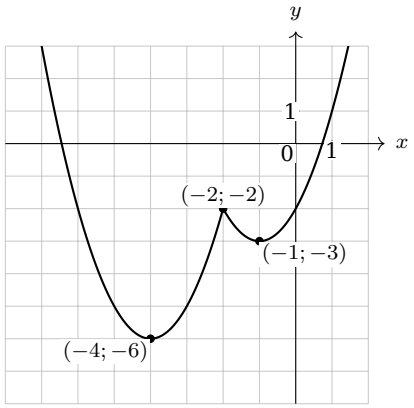
Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{15}{100}x+\frac{70}{100}(50-x)=\frac{40}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $15x+3500-70x=2000$. Поэтому $55x=1500$ и $x=\frac{300}{11}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{300}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 5x + 4 - 3|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t - 2$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -6)$ и $(1; -3)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -6$ пересечений нет; при $m = -6$ одно; при $-6 < m < -3$ два; при $m = -3$ три.
При $-3 < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -3$ или $m = -2$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 13, а основание равно 10. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \dfrac{169}{24}$.
Ответ: $\dfrac{169}{24}$.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 8$, $CD = 17$, основание $BC = 1$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 17 - 1 = 16$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 8$, $AP = BC = 1$, $PD = AD - BC = 15$.
В треугольнике CPD выполняется $8^2 + 15^2 = 17^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 8.
Площадь $S = \dfrac{16 + 1}{2} \cdot 8 = 68$.
Ответ: 68.

Решения. Вариант 19

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 175, 185, 195 мм. Наибольшая из них — 195 мм.
Ответ: 195.

Задание 2

$H = 165 \cdot \dfrac{55}{100} = 90{,}75$ мм.
Ответ: 90,75.

Задание 3

Диаметр диска: $13 \cdot 25{,}4 = 330{,}2$ мм.
Высота боковины: $175 \cdot \dfrac{60}{100} = 105$ мм.
$D = 330{,}2 + 2 \cdot 105 = 540{,}2$ мм.
Ответ: 540,2.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$175 \cdot \dfrac{55}{100} - 185 \cdot \dfrac{50}{100} = 3{,}75$ мм.
Ответ: 3,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $14 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 175 \cdot \dfrac{55}{100} = 548{,}1$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{548{,}1 - 540{,}2}{540{,}2} \cdot 100\% \approx 1{,}5\%$.
Ответ: 1,5.

Задание 6

$(-13)^2 = 169$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $169 - 49 = 120$.
Ответ: 120.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{137}{7}$ приблизительно равно $19{,}571$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $14 + 2\sqrt{238} + 17 - 2\sqrt{238} = 31$.
Ответ: 31.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+8)(x-4)=0$. Корни: -8 и 4.
Требуемый корень равен 4.
Ответ: 4.

Задание 10

Исправных ламп $1000-10=990$. Вероятность равна $\dfrac{990}{1000}=0{,}99$.
Ответ: $0{,}99$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$.
Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$.
Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;2)$.
Ему соответствует формула 1, $y=x^2+2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F=14$: $C=\dfrac{5}{9}(14-32)=\dfrac{5}{9}\cdot(-18)=-10$.
Ответ: -10.

Задание 13

$49=7^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 7.
Множество решений: $(-\infty;-7]\cup[7;+\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $27+20\cdot5=127$.
Ответ: 127.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-130^\circ=50^\circ$, поэтому каждый равен 25°.
Ответ: 25.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB=30:2=15$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH=\sqrt{17^2-15^2}=8$.
Ответ: 8.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $70:2=35$. Вторая сторона: $35-18=17$.
Площадь равна $18\cdot17=306$.
Ответ: 306.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 12 и 5.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{12^2+5^2}=13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 20t + 64 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 16) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 16$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 16$ — $x = \pm 4$.
Ответ: $-4;\ -2;\ 2;\ 4$.

Задание 21

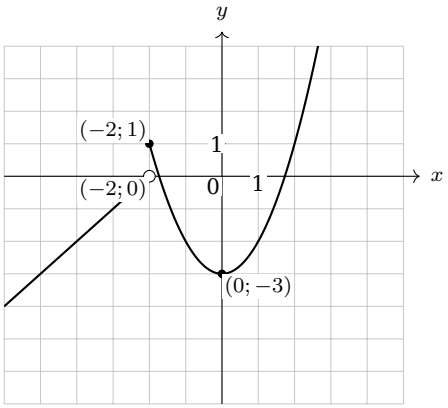
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 90 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{90}{x} - \dfrac{90}{x+3} = 1$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $270 = 1x(x+3)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 15)(x + 18) = 0$.
Корень $x = -18$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 15 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 15 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x)^2 - 3, & x \geq -2, \\ x + 2, & x < -2. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0; -3)$, оставленная при $x \geq -2$. Точка $(-2; 1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < -2$. Его конечная точка $(-2; 0)$ выколота.
При $m < -3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3 < m < 0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0 \leq m \leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(-2; 1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -3$ или $0 \leq m \leq 1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 18 и 18. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $18 + 18 = 36$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 36 \cdot 18$ и $v^2 = 36 \cdot 18$.
Поэтому $u = 18\sqrt{2}$, $v = 18\sqrt{2}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 36 + 36\sqrt{2}$.
Ответ: $36 + 36\sqrt{2}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 6$, $MD = 4$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 16$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$.
Ответ: $\frac{10}{3}$.

Решения. Вариант 20

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

коридор — 2; спальня — 4; гостиная — 6; санузел — 1.
Ответ: 2461.

Задание 2

Пол коридора занимает 125 клеток, его площадь $125 \cdot 0{,}4^2 = 20$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ м^2. Требуется $20 : 0{,}08 = 250$ плиток.
Нужно $\left\lceil \frac{250}{6} \right\rceil = 42$ целых упаковок.
Ответ: 42.

Задание 3

На плане помещение занимает 156 клеток.
Его площадь $156 \cdot 0{,}4^2 = 24{,}96$ м^2.
Ответ: 24,96.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\frac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $350 + 0 \cdot 50 = 350$ руб.
Тариф «Б»: $500 + 0 \cdot 30 = 500$ руб.
Безлимитный тариф стоит 750 руб. Наименьшая плата — 350 руб.
Ответ: 350.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{11}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{5}$.
Умножаем на 3 и получаем 1,2.
Ответ: 1,2.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{98}$ приблизительно равно 9,899. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$15 + 1 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 7$. Из равенства получаем $x-(7)=\frac{13}{5}$.
$x = 9{,}6$. Это значение допустимо, так как числитель $13 \neq 0$.
Ответ: $9{,}6$.

Задание 10

Всего шаров $36 + 12 + 2 = 50$. Благоприятных исходов 12, поэтому вероятность равна $\frac{12}{50} = 0{,}24$.
Ответ: $0{,}24$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-2}{x}$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \frac{2S}{a+b} = \frac{2 \cdot 60}{7+17} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

Получаем $4x > -28$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(-7; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 4 \cdot 2^3 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$. Длина положительна, поэтому $BC = 20$.
Ответ: 20.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 64^\circ : 2 = 32^\circ$.
Ответ: 32.

Задание 17

$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{19 + 11}{2} \cdot 9 = 135$.
Ответ: 135.

Задание 18

Основание занимает 6 клеток, высота — 3 клеток. Площадь равна $\dfrac{6\cdot 3}{2}=9$.

Ответ: 9.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-2-x$. Подставим во второе: $x^2+(-2-x)^2=4$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+2x=0$.
Разложим на множители: $(x+2)(x)=0$. Следовательно, $x=-2$ или $x=0$.
При $x=-2$ первое уравнение даёт $y=0$; при $x=0$ получаем $y=-2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -2, сумма их квадратов равна 4.
Ответ: $(x;y)=(-2;0)$ или $(x;y)=(0;-2)$.

Задание 21

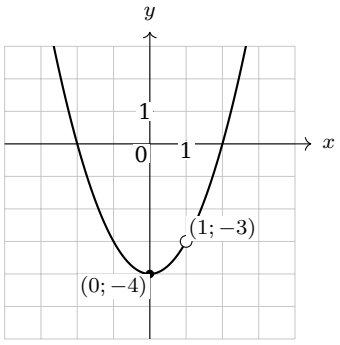
Моторная лодка прошла 34 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{34}{x+3}+\dfrac{22}{x-3}=4$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $4x^2-56x=0$. Его корни: $x=14$ и $x=0$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=14$ времена равны 2 ч и 2 ч, их сумма 4 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2-4)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 - 4$.
Строим параболу с вершиной $(0; -4)$ и выколотой точкой $(1; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 5$, $BF = 12$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 6$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 3$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 6/\cos 45^\circ = 6\sqrt{2}$.

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 21

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4; Журавушка — 1; Камышино — 3.
Ответ: 413.

Задание 2

Путь занимает $5 + 12 = 17$ клеток.
Длина пути равна $17 \cdot 1 = 17$ км.
Ответ: 17.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 5 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\dfrac{11}{15} \cdot 60 + \dfrac{13}{10} \cdot 60 = 122$.
Ответ: 122.

Задание 5

Васильково: $2 \cdot 53 + 0{,}5 \cdot 645 + 1 \cdot 815 = 1243{,}5$ руб.
Иваново: $2 \cdot 60 + 0{,}5 \cdot 615 + 1 \cdot 800 = 1227{,}5$ руб.
Камышино: $2 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 600 + 1 \cdot 824 = 1224$ руб.
Журавушка: $2 \cdot 45 + 0{,}5 \cdot 624 + 1 \cdot 845 = 1247$ руб.
Наименьшая стоимость — 1224 руб.
Ответ: 1224.

Задание 6

Сумма в скобках равна $6{,}2$.
$6{,}2 : 0{,}5 = 12{,}4$.
Ответ: 12,4.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{260}$ приблизительно равно $-16{,}125$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3 \cdot 2 - 4} = 3^2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

$5x = 85{,}5 - (8) = 77{,}5$, поэтому $x = 15{,}5$.
Ответ: 15,5.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 18$; их 3. Вероятность равна $\dfrac{3}{20} = 0{,}15$.

Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{13{,}2 \cdot 22}{22 - 13{,}2} = 33$ Ом.

Ответ: 33.

Задание 13

Нули множителей: 1 и 9. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(1; 9)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{11} = -12 + (11-1) \cdot (-2) = -32$.
Ответ: -32.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 34° - 36° = 110°$.
Ответ: 110.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

Ответ: 18.

Задание 18

Основания равны 5 и 8, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{5+8}{2} \cdot 3 = 19{,}5$.

Ответ: $19{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-36}{x-1}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 1$. Разложим числитель: $x^2-36=(x-6)(x+6)$.
Критические точки: -6, 1, 6. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -6 и 6 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-6]\cup(1;6]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $3{,}2$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 12 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+12$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+12)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+12}=\dfrac{5}{16}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+12)=\dfrac{16}{5}(2x+12)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x=4$ и $x=-\dfrac{48}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$, поэтому время совместной работы равно $3{,}2$ ч.
Ответ: 4 ч.

Задание 22

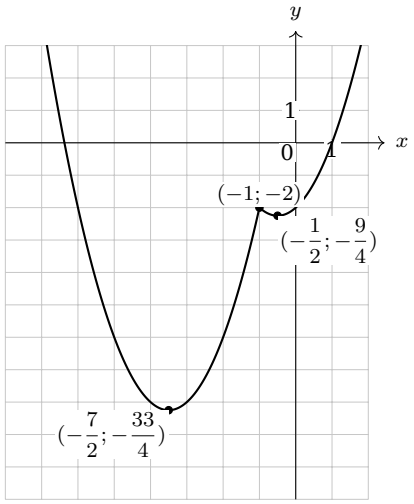
Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 1 - 3|x + 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t - 2$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$ и $(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.

При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 7$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 12$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(5 + 12) = 34$.

Ответ: 34.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.

Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.

В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 5$, $BC = 8$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 8$ и $BH = AC = 5$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 5|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-5)^2 + 8^2$.

После раскрытия скобок получаем $10R = 89$. Поэтому $R = \dfrac{89}{10}$.

Ответ: $\dfrac{89}{10}$.

Решения. Вариант 22

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 4; Сосновка — 1; Озёрное — 2.
Ответ: 412.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $9+6+8=23$ км.
Ответ: 23.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 15 и 8 км.
Её длина $\sqrt{15^2+8^2}=17$ км.
Ответ: 17.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 9 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 10 км.
Время: $\dfrac{9}{80}\cdot 60+\dfrac{10}{40}\cdot 60=21{,}75$ мин.
Ответ: 21,75.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{23\cdot 7{,}5}{100}\cdot 59=101{,}775$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{17\cdot 10}{100}\cdot 59=100{,}3$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{9\cdot 7{,}5+10\cdot 10}{100}\cdot 59=98{,}825$ руб.
Наименьшая стоимость — $98{,}825$ руб.
Ответ: 98,825.

Задание 6

$(-4)^2=16$, $2^2=4$. Поэтому значение выражения равно $16-4=12$.
Ответ: 12.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{117}{17}$ приблизительно равно $6{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15+2\sqrt{210}+14-2\sqrt{210}=29$.
Ответ: 29.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-3)(x-10)=0$. Корни: 3 и 10.
Требуемый корень равен 3.
Ответ: 3.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 7 = 993$. Вероятность равна $\dfrac{993}{1000} = 0{,}993$.

Ответ: $0{,}993$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 220{,}5}{7^2} = 9$ кг.

Ответ: 9.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -2$, второе — $x \le 8$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-2;8]$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 19-го ряда число мест увеличивается 18 раз: $12 + 18 \cdot 3 = 66$.
Ответ: 66.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$, поэтому каждый равен 53°.
Ответ: 53.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{24^2 + 45^2} = 51$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 51 : 2 = 25{,}5$.
Ответ: $25{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 17 \cdot 5 = 85$.
Ответ: 85.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 2. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 2 = 14$.
Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 25x - 100 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 25(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+4)(x^2-25) = (x+4)(x-5)(x+5) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-5;\ -4;\ 5$.
Ответ: $-5;\ -4;\ 5$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 12 км/ч, второго 18 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками 51 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

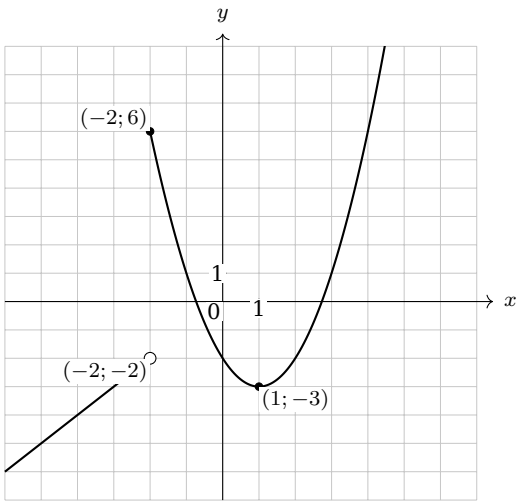
Сумма путей: $12(t - \dfrac{3}{4}) + 18t = 51$. Отсюда $30t = 60$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $18 \cdot 2 = 36$ км. Время движения первого $\dfrac{5}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 36 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-1)^2-3, & x\geq -2,\\ x, & x<-2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(1;-3)$, оставленная при $x\geq -2$. Точка $(-2;6)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x$ при $x<-2$. Его конечная точка $(-2;-2)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-2\leq m\leq 6$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>6$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 6 включена, поскольку точка $(-2;6)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-2\leq m\leq 6$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=5$, $AC=20$, $NC=8$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+8$. По подобию $\dfrac{x}{x+8}=\dfrac{5}{20}$.

Отсюда $20x=5(x+8)$, то есть $15x=40$. Получаем $BN=\dfrac{8}{3}$.

Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 17$, $BC = 16$.
Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{128}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 17 - \dfrac{128}{17} = \dfrac{161}{17}$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны.
Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 16 \cdot \dfrac{\frac{161}{17}}{17} = \dfrac{2576}{289}$.

Ответ: $\dfrac{2576}{289}$.

Решения. Вариант 23

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м^3 — печь № 2, 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 213.

Задание 2

$V = 3{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}1 = 18{,}816$ м^3.
Ответ: 18,816.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $30 : 2 = 15$ см и 20 см.
$R = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ см.
Ответ: 25.

Задание 4

После скидки остаётся 85% цены. Получаем $29200 \cdot \dfrac{85}{100} = 24820$ руб.
Ответ: 24820.

Задание 5

Объём парной равен $18{,}816$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $29200 + 800 = 30000$ руб.
Печь № 3: $24800 + 800 + 4800 = 30400$ руб.
Наименьшая сумма — 30000 руб.
Ответ: 30000.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{7}{4} - \dfrac{7}{5} = \dfrac{7}{20}$.
Умножаем на 3 и получаем $1{,}05$.
Ответ: 1,05.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{179}$ приблизительно равно $13{,}379$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$11 + 1 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -1$. Из равенства получаем $x - (-1) = -\dfrac{29}{2}$.
$x = -15{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-29 \neq 0$.
Ответ: $-15{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $23 + 22 + 5 = 50$. Благоприятных исходов 22, поэтому вероятность равна $\dfrac{22}{50} = 0{,}44$.
Ответ: $0{,}44$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 95$: $C = \dfrac{5}{9}(95 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (63) = 35$.
Ответ: 35.

Задание 13

$9 = 3^2$. Требуются числа, модуль которых больше 3.
Множество решений: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 8 \cdot 3^5 = 1944$.
Ответ: 1944.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$. Длина положительна, поэтому $BC = 15$.
Ответ: 15.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $40 : 2 = 20$. Вторая сторона: $20 - 5 = 15$.
Площадь равна $5 \cdot 15 = 75$.
Ответ: 75.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 6 и 3, поэтому площадь равна $6 \cdot 3 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Утверждение 3 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{8}{x-15}+\frac{8}{x+15}=1$.
Область допустимых значений: $x \neq 15$ и $x \neq -15$.
Умножим уравнение на $(x-15)(x+15)$: $8(x+15)+8(x-15)=x^2-225$.
Получим $x^2-16x-225=0$, или $(x-8)^2=289=17^2$.
Поэтому $x = 8-17 = -9$ или $x = 8+17 = 25$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-9;\ 25$.

Задание 21

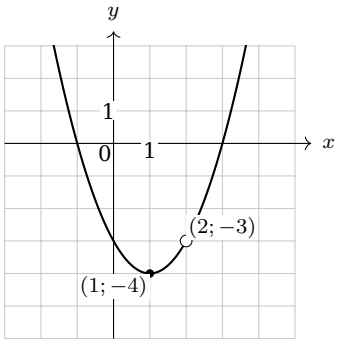
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{20}{100}x+\frac{75}{100}(50-x)=\frac{45}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $20x+3750-75x=2250$. Поэтому $55x=1500$ и $x=\frac{300}{11}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{300}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2-2x-3)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$.
Строим параболу с вершиной $(1; -4)$ и выколотой точкой $(2; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17, а основание равно 16. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{17 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 120} = \dfrac{289}{30}$.
Ответ: $\dfrac{289}{30}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 15$, $CD = 17$, основание $BC = 4{,}5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 17 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{25}{2}$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 15$, $AP = BC = \dfrac{9}{2}$, $PD = AD - BC = 8$.

В треугольнике CPD выполняется $15^2 + 8^2 = 17^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 15.

Площадь $S = \dfrac{\dfrac{25}{2} + \dfrac{9}{2}}{2} \cdot 15 = \dfrac{255}{2}$.

Ответ: $\dfrac{255}{2}$.

Решения. Вариант 24

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 6.
Ответ: 6.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 5, 6, 8, 10.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{18+12+20+22}{4}=18$ ГБ.
Ответ: 18.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 4 ГБ.
Плата: $470+0\cdot 2+4\cdot 70=750$ руб.
Ответ: 750.

Задание 5

За месяц № 6 использовано 500 минут и 22 ГБ.
«Основной»: $470+100\cdot 2+12\cdot 70=1510$ руб.
«Расширенный»: $680+0\cdot 2+2\cdot 50=780$ руб.
Наименьшая плата — 780 руб.
Ответ: 780.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}8$.
$11{,}8:0{,}2=59$.
Ответ: 59.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{415}$ приблизительно равно $-20{,}372$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{4\cdot 2-5}=4^{3}=64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$4x=48-(10)=38$, поэтому $x=9{,}5$.
Ответ: $9{,}5$.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 16$; их 2. Вероятность равна $\dfrac{2}{20} = 0{,}1$.
Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 3x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = -x + 1$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 112{,}5}{7+18} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 13

Получаем $-3x \geq 6$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; -2]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{10} = 17 + (10-1) \cdot (-2) = -1$.
Ответ: -1.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 60° - 30° = 90°$.
Ответ: 90.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 88° : 2 = 44°$.
Ответ: 44.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{24+7}{2} \cdot 7 = 108{,}5$.
Ответ: $108{,}5$.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Утверждение 2 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 3 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 34t + 225 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 25) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 25$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 25$ — $x = \pm 5$.
Ответ: $-5;\ -3;\ 3;\ 5$.

Задание 21

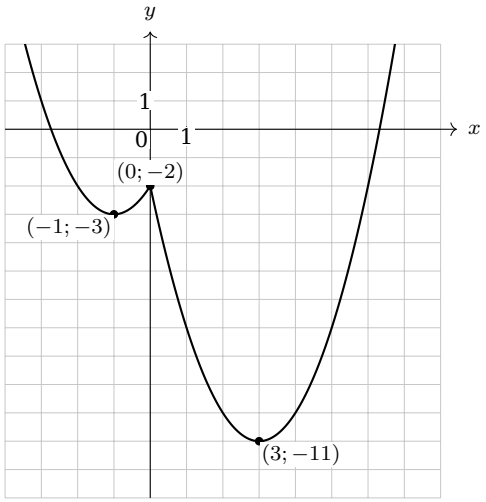
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 168 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{168}{x} - \dfrac{168}{x+4} = 1$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $672 = 1x(x+4)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 24)(x + 28) = 0$.
Корень $x = -28$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 24 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 2 - 4|x|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 6t - 2$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; -3)$ и $(3; -11)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -11$ пересечений нет; при $m = -11$ одно; при $-11 < m < -3$ два; при $m = -3$ три.
При $-3 < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -3$ или $m = -2$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 16 и 9. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $16 + 9 = 25$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 25 \cdot 16$ и $v^2 = 25 \cdot 9$.
Поэтому $u = 20$, $v = 15$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 60$.
Ответ: 60.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a + b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 7$, $MD = 5$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{7} = \dfrac{25}{7}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 7 - \dfrac{25}{7} = \dfrac{24}{7}$.
Ответ: $\dfrac{24}{7}$.

Решения. Вариант 25

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 2, А5 — размеры № 1, А4 — размеры № 3.
Ответ: 213.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны $14{,}8$ см и 21 см.
Площадь $14{,}8 \cdot 21 = 310{,}8$ см^2.
Ответ: 310,8.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 90 \cdot 400}{1000} = 2{,}24532$ кг.
После округления получаем $2{,}2$ кг.
Ответ: 2,2.

Задание 5

Всего нужно $690 \cdot 4 = 2760$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2760}{400} \right\rceil = 7$.
Стоимость: $7 \cdot 320 = 2240$ руб.
Ответ: 2240.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $25 - 4 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{135}{13}$ приблизительно равно $10{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $13 + 2\sqrt{195} + 15 - 2\sqrt{195} = 28$.
Ответ: 28.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 9)(x - 10) = 0$. Корни: -9 и 10.
Требуемый корень равен 10.
Ответ: 10.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 20 = 980$. Вероятность равна $\dfrac{980}{1000} = 0{,}98$.

Ответ: $0{,}98$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{3{,}6 \cdot 6}{6 - 3{,}6} = 9$ Ом.

Ответ: 9.

Задание 13

Нули множителей: -12 и -6. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-12; -6]$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 18-го ряда число мест увеличивается 17 раз: $21 + 17 \cdot 5 = 106$.
Ответ: 106.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$, поэтому каждый равен 34°.
Ответ: 34.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32$.

Ответ: 32.

Задание 18

Основание занимает 4 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=0-x$. Подставим во второе: $x^2+(0-x)^2=2$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-1=0$.
Разложим на множители: $(x+1)(x-1)=0$. Следовательно, $x=-1$ или $x=1$.
При $x=-1$ первое уравнение даёт $y=1$; при $x=1$ получаем $y=-1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 0, сумма их квадратов равна 2.
Ответ: $(x;y)=(-1;1)$ или $(x;y)=(1;-1)$.

Задание 21

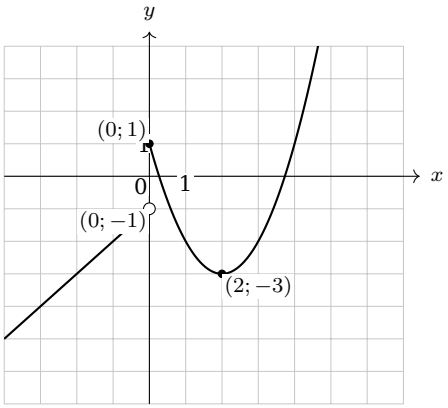
Моторная лодка прошла 40 км по течению реки и 36 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>4$. Скорости по течению и против течения равны $x+4$ и $x-4$.
Уравнение времени: $\dfrac{40}{x+4}+\dfrac{36}{x-4}=5$.
После умножения на $(x+4)(x-4)$ и приведения получаем $5x^2-76x-64=0$. Его корни: $x=16$ и $x=-\dfrac{4}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>4$. Для $x=16$ времена равны 2 ч и 3 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2-3, & x\geq 0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;-3)$, оставленная при $x\geq 0$. Точка $(0;1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x-1$ при $x<0$. Его конечная точка $(0;-1)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1\leq m\leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(0;1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-1\leq m\leq 1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=8$, $BF=15$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{64+225}=17$.
Ответ: 17.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 7$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{7}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 7/\cos 60^\circ = 14$.

Ответ: 14.

Решения. Вариант 26

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 185, 195 мм. Наименьшая из них — 185 мм.
Ответ: 185.

Задание 2

$H = 175 \cdot \dfrac{55}{100} = 96{,}25$ мм.
Ответ: 96,25.

Задание 3

Диаметр диска: $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины: $185 \cdot \dfrac{60}{100} = 111$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 111 = 577{,}6$ мм.
Ответ: 577,6.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$185 \cdot \dfrac{55}{100} - 195 \cdot \dfrac{50}{100} = 4{,}25$ мм.
Ответ: 4,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 185 \cdot \dfrac{55}{100} = 584{,}5$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{584{,}5 - 577{,}6}{577{,}6} \cdot 100\% \approx 1{,}2\%$.
Ответ: 1,2.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{5}{4} - \dfrac{15}{4} = -\dfrac{5}{2}$.
Умножаем на 2 и получаем -5.
Ответ: -5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{302}$ приблизительно равно $17{,}378$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$7 + 1 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 7$. Из равенства получаем $x-(7)=\frac{17}{2}$.
$x = 15{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $17 \neq 0$.
Ответ: $15{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $15 + 19 + 6 = 40$. Благоприятных исходов 19, поэтому вероятность равна $\frac{19}{40} = 0{,}475$.
Ответ: $0{,}475$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{3}{x}$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \frac{2E}{v^2} = \frac{2 \cdot 171{,}5}{7^2} = 7$ кг.
Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -4$, второе — $x \leq 7$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-4; 7]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 6 \cdot 3^6 = 4374$.
Ответ: 4374.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Длина положительна, поэтому $BC = 5$.
Ответ: 5.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{24^2 + 45^2} = 51$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 51 : 2 = 25{,}5$.
Ответ: $25{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 25 \cdot 9 = 225$.
Ответ: 225.

Задание 18

Основания равны 4 и 8, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{4+8}{2} \cdot 5 = 30$.

Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Утверждение 3 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.

Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-49}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-49 = (x-7)(x+7)$.
Критические точки: -7, 1, 7. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -7 и 7 включаем, точку 1 исключаем.

Ответ: $(-\infty;-7] \cup (1;7]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $3{,}6$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 3 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

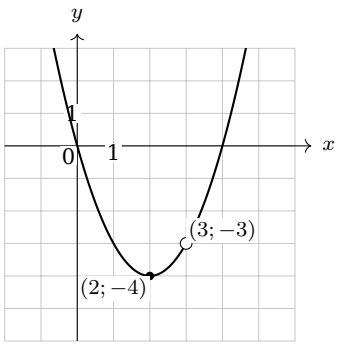
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+3$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+3)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{5}{18}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+3) = \dfrac{18}{5}(2x+3)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 6$ и $x = -\dfrac{9}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$, поэтому время совместной работы равно $3{,}6$ ч.

Ответ: 6 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-4x)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$. Строим параболу с вершиной $(2; -4)$ и выколотой точкой $(3; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6$, $CK = 8$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 6$. Сторона $BC = BK + CK = 14$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(6 + 14) = 40$.
Ответ: 40.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, $BC = 4$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 4$ и $BH = AC = 6$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 6|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-6)^2 + 4^2$.

После раскрытия скобок получаем $12R = 52$. Поэтому $R = \dfrac{13}{3}$.

Ответ: $\dfrac{13}{3}$.

Решения. Вариант 27

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

коридор — 2; гостиная — 6; кухня — 7; кладовая — 3.
Ответ: 2673.

Задание 2

Пол коридора занимает 125 клеток, его площадь $125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$ м^2. Требуется $31{,}25 : 0{,}125 = 250$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{250}{8} \right\rceil = 32$ целых упаковок.
Ответ: 32.

Задание 3

На плане помещение занимает 44 клеток.
Его площадь $44 \cdot 0{,}5^2 = 11$ м^2.
Ответ: 11.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 99 и 44 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{99-44}{44} \cdot 100\% = 125\%$.
Ответ: 125.

Задание 5

Тариф «А»: $360 + 4 \cdot 55 = 580$ руб.
Тариф «Б»: $510 + 0 \cdot 35 = 510$ руб.
Безлимитный тариф стоит 765 руб. Наименьшая плата — 510 руб.
Ответ: 510.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}5$.
$11{,}5 : 0{,}2 = 57{,}5$.
Ответ: 57,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{62}$ приблизительно равно $-7{,}874$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{4\cdot 2-5} = 6^3 = 216$.
Ответ: 216.

Задание 9

$5x = -24{,}5 - (13) = -37{,}5$, поэтому $x = -7{,}5$.
Ответ: $-7{,}5$.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 48$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{50} = 0{,}12$.

Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = -2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 2, $y = -x$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = -3x - 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = -13$: $C = \dfrac{5}{9}(-13 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-45) = -25$.

Ответ: -25.

Задание 13

$16 = 4^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 4.
Множество решений: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{22} = -16 + (22 - 1) \cdot (-4) = -100$.
Ответ: -100.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 64° - 67° = 49°$.
Ответ: 49.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 16 : 2 = 8$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $20 : 2 = 10$. Вторая сторона: $10 - 4 = 6$.
Площадь равна $4 \cdot 6 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 18

Основание равно 6, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 6 \cdot 5 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 верно. Это формула площади параллелограмма.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 36x - 180 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+5) - 36(x+5) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+5)(x^2-36) = (x+5)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -5;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -5;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 13 км/ч, второго 14 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $50{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.
Сумма путей: $13(t - \frac{1}{4}) + 14t = \frac{203}{4}$. Отсюда $27t = 54$, то есть $t = 2$.
Второй велосипедист проехал $14 \cdot 2 = 28$ км. Время движения первого $\frac{7}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 28 км.

Задание 22

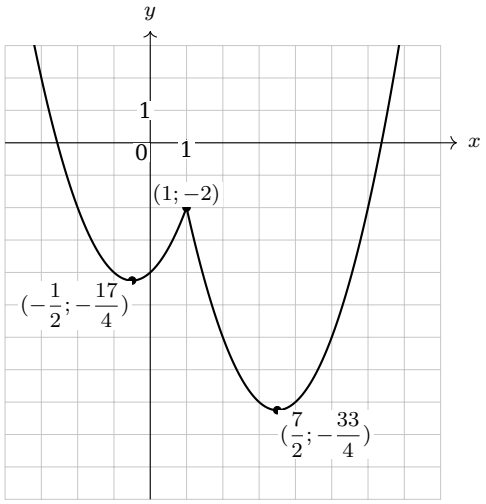
Постройте график функции $y = x^2 - 3x - 4|x - 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 2$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{3}{2}; -\frac{17}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.

При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{17}{4}$ два; при $m = -\frac{17}{4}$ три.

При $-\frac{17}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{17}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 6$, $AC = 12$, $NC = 9$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 9$. По подобию $\frac{x}{x+9} = \frac{6}{12}$.

Отсюда $12x = 6(x + 9)$, то есть $6x = 54$. Получаем $BN = 9$.

Ответ: 9.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180°$.

Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90°$.

Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90°$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 10$, $BC = 12$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{36}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 10 - \dfrac{36}{5} = \dfrac{14}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 12 \cdot \dfrac{\frac{14}{5}}{10} = \dfrac{84}{25}$.

Ответ: $\dfrac{84}{25}$.

Решения. Вариант 28

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Камышино — 3; Васильково — 4; Иваново — 2.
Ответ: 342.

Задание 2

Путь занимает $16 + 12 = 28$ клеток.
Длина пути равна $28 \cdot 2 = 56$ км.
Ответ: 56.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 10 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ км.
Ответ: 26.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\dfrac{22}{16} \cdot 60 + \dfrac{26}{12} \cdot 60 = 212{,}5$.
Ответ: 212,5.

Задание 5

Васильково: $3 \cdot 61 + 1 \cdot 620 + 1 \cdot 807 = 1610$ руб.
Иваново: $3 \cdot 51 + 1 \cdot 605 + 1 \cdot 831 = 1589$ руб.
Камышино: $3 \cdot 46 + 1 \cdot 629 + 1 \cdot 852 = 1619$ руб.
Журавушка: $3 \cdot 54 + 1 \cdot 650 + 1 \cdot 822 = 1634$ руб.
Наименьшая стоимость — 1589 руб.
Ответ: 1589.

Задание 6

$(-7)^2 = 49$, $11^2 = 121$. Поэтому значение выражения равно $49 - 121 = -72$.
Ответ: -72.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{184}{13}$ приблизительно равно $14{,}154$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $7 + 2\sqrt{42} + 6 - 2\sqrt{42} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 3)(x - 4) = 0$. Корни: -3 и 4.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 24 = 476$. Вероятность равна $\dfrac{476}{500} = 0{,}952$.

Ответ: $0{,}952$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 120}{7+17} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $4x > 24$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(6; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 17-го ряда число мест увеличивается 16 раз: $14 + 16 \cdot 5 = 94$.
Ответ: 94.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, поэтому каждый равен 36°.
Ответ: 36.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 92^\circ : 2 = 46^\circ$.
Ответ: 46.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{17 + 12}{2} \cdot 7 = 101{,}5$.
Ответ: $101{,}5$.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 6, поэтому площадь равна $4 \cdot 6 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{6}{x-8}+\frac{6}{x+8}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 8$ и $x\neq -8$.
Умножим уравнение на $(x-8)(x+8)$: $6(x+8)+6(x-8)=x^2-64$.
Получим $x^2-12x-64=0$, или $(x-6)^2=100=10^2$.
Поэтому $x=6-10=-4$ или $x=6+10=16$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-4;\ 16$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{25}{100}x+\frac{65}{100}(50-x)=\frac{50}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $25x+3250-65x=2500$. Поэтому $40x=750$ и $x=\frac{75}{4}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{75}{4}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x-3)^2 - 3, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3; -3)$, оставленная при $x \geq 0$. Точка $(0; 6)$ входит в график.

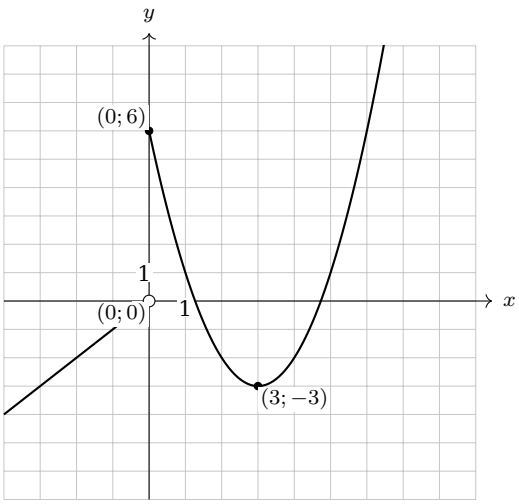
Вторая часть — луч прямой $y = x$ при $x < 0$. Его конечная точка $(0; 0)$ выколота.

При $m < -3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.

При $-3 < m < 0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.

При $0 \leq m \leq 6$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.

При $m > 6$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 6 включена, поскольку точка $(0; 6)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -3$ или $0 \leq m \leq 6$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а основание равно 12. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \dfrac{25}{4}$.

Ответ: $\dfrac{25}{4}$.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 24$, $CD = 26$, основание $BC = 8$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 26 - 8 = 18$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 24$, $AP = BC = 8$, $PD = AD - BC = 10$.
В треугольнике CPD выполняется $24^2 + 10^2 = 26^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 24.
Площадь $S = \dfrac{18 + 8}{2} \cdot 24 = 312$.
Ответ: 312.

Решения. Вариант 29

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Озёрное — 3; Луговое — 2; Берёзовка — 4.
Ответ: 324.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $12 + 8 + 15 = 35$ км.
Ответ: 35.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 8 и 15 км.
Её длина $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ км.
Ответ: 17.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 12 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 17 км.
Время: $\dfrac{12}{60} \cdot 60 + \dfrac{17}{30} \cdot 60 = 46$ мин.
Ответ: 46.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{35 \cdot 8}{100} \cdot 61 = 170{,}8$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{25 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 61 = 144{,}875$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{12 \cdot 8 + 17 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 61 = 157{,}075$ руб.

Наименьшая стоимость — $144{,}875$ руб.
Ответ: 144,875.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{11}{2} - 1 = \dfrac{9}{2}$.
Умножаем на 4 и получаем 18.
Ответ: 18.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{468}$ приблизительно равно $21{,}633$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$10 + 3 = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -2$.
$x = -7$. Это значение допустимо, так как числитель $-8 \neq 0$.
Ответ: -7.

Задание 10

Всего шаров $31 + 9 + 10 = 50$. Благоприятных исходов 9, поэтому вероятность равна $\frac{9}{50} = 0{,}18$.
Ответ: $0{,}18$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-1}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{12 \cdot 20}{20 - 12} = 30$ Ом.
Ответ: 30.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 7. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-4; 7)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 6 \cdot 3^5 = 1458$.
Ответ: 1458.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. Длина положительна, поэтому $BC = 13$.
Ответ: 13.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{12 \cdot 18}{2} = 108$.

Ответ: 108.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.

Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 52x^2 + 576 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 52t + 576 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.

Ответ: $-6;\ -4;\ 4;\ 6$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 112 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

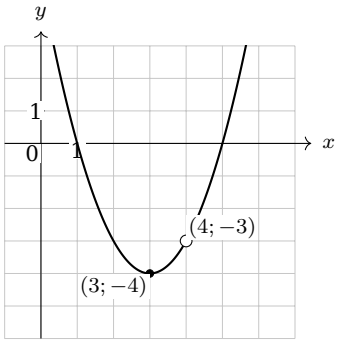
Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{112}{x} - \dfrac{112}{x+2} = 1$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $224 = 1x(x+2)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 14)(x + 16) = 0$.
Корень $x = -16$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 14 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.

Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-6x+5)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$.
Строим параболу с вершиной $(3; -4)$ и выколотой точкой $(4; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 50 и 18. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $50 + 18 = 68$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 68 \cdot 50$ и $v^2 = 68 \cdot 18$.
Поэтому $u = 10\sqrt{34}$, $v = 6\sqrt{34}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 68 + 16\sqrt{34}$.
Ответ: $68 + 16\sqrt{34}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 6$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Ответ: $\dfrac{7}{2}$.

Решения. Вариант 30

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3, 8 м^3 — печь № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

$V = 3{,}3 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}2 = 17{,}424$ м^3.
Ответ: 17,424.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $36 : 2 = 18$ см и 24 см.
$R = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30$ см.
Ответ: 30.

Задание 4

После скидки остаётся 80% цены. Получаем $29800 \cdot \dfrac{80}{100} = 23840$ руб.
Ответ: 23840.

Задание 5

Объём парной равен $17{,}424$ м^3. Подходят печи № 1, 2, 3.
Печь № 1: $23500 + 850 = 24350$ руб.
Печь № 2: $29800 + 850 = 30650$ руб.
Печь № 3: $25200 + 850 + 4950 = 31000$ руб.
Наименьшая сумма — 24350 руб.
Ответ: 24350.

Задание 6

Сумма в скобках равна $7{,}4$.
$7{,}4 : 0{,}2 = 37$.
Ответ: 37.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{130}$ приблизительно равно $-11{,}402$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{2 \cdot 2 - 1} = 5^3 = 125$.
Ответ: 125.

Задание 9

$8x = -44 - (-4) = -40$, поэтому $x = -5$.
Ответ: -5.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 48$; их 16. Вероятность равна $\dfrac{16}{50} = 0{,}32$.

Ответ: $0{,}32$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 48}{4^2} = 6$ кг.

Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -11$, второе — $x \le 1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-11; 1]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{19} = 2 + (19-1) \cdot (7) = 128$.
Ответ: 128.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 39° - 61° = 80°$.
Ответ: 80.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 34 : 2 = 17$.
Ответ: 17.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 16 \cdot 3 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 18

Основание занимает 3 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Утверждение 3 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=2-x$. Подставим во второе: $x^2+(2-x)^2=4$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-2x=0$.
Разложим на множители: $(x)(x-2)=0$. Следовательно, $x=0$ или $x=2$.
При $x=0$ первое уравнение даёт $y=2$; при $x=2$ получаем $y=0$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 2, сумма их квадратов равна 4.
Ответ: $(x;y)=(0;2)$ или $(x;y)=(2;0)$.

Задание 21

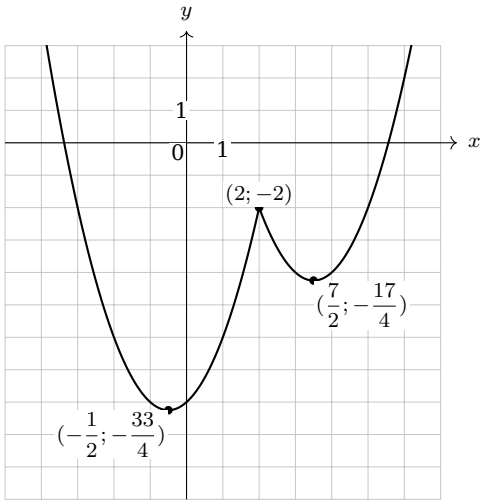
Моторная лодка прошла 46 км по течению реки и 13 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{46}{x+5}+\dfrac{13}{x-5}=3$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $3x^2-59x+90=0$. Его корни: $x=18$ и $x=\dfrac{5}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=18$ времена равны 2 ч и 1 ч, их сумма 3 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 3x - 4|x - 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t - 2$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{17}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{17}{4}$ два; при $m = -\frac{17}{4}$ три.
При $-\frac{17}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{17}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 6$, $BF = 8$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 8$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 4$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 8/\cos 30^\circ = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Решения. Вариант 31

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 3.
Ответ: 3.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{4+8+6+10}{4} = 7$ ГБ.
Ответ: 7.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 200 минут и 0 ГБ.
Плата: $480 + 200 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 880$ руб.
Ответ: 880.

Задание 5

За месяц № 1 использовано 250 минут и 12 ГБ.
«Основной»: $480 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 480$ руб.
«Расширенный»: $695 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 695$ руб.
Наименьшая плата — 480 руб.
Ответ: 480.

Задание 6

$(-6)^2 = 36$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $36 - 4 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{312}{17}$ приблизительно равно $18{,}353$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $2 + 2\sqrt{14} + 7 - 2\sqrt{14} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-6)(x-11) = 0$. Корни: 6 и 11.
Требуемый корень равен 11.
Ответ: 11.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 11 = 489$. Вероятность равна $\dfrac{489}{500} = 0{,}978$.

Ответ: $0{,}978$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 14$: $C = \dfrac{5}{9}(14 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-18) = -10$.

Ответ: -10.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых больше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 10-го ряда число мест увеличивается 9 раз: $17 + 9 \cdot 2 = 35$.
Ответ: 35.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$, поэтому каждый равен 49°.
Ответ: 49.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $36 : 2 = 18$. Вторая сторона: $18 - 11 = 7$.
Площадь равна $11 \cdot 7 = 77$.
Ответ: 77.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-64}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-64 = (x-8)(x+8)$.
Критические точки: -8, 1, 8. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -8 и 8 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-8]\cup(1;8]$.

Задание 21

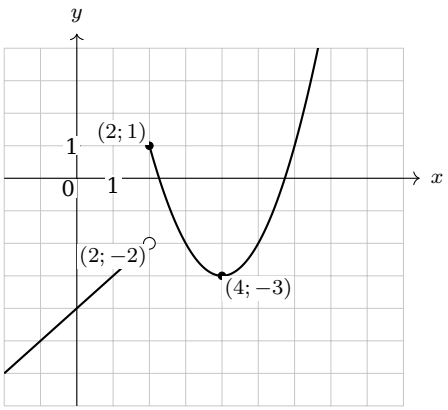
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 6 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 9 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+9$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+9)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+9} = \dfrac{1}{6}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+9) = 6(2x+9)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 9$ и $x = -6$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{6}$, поэтому время совместной работы равно 6 ч.
Ответ: 9 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-4)^2-3, & x\geq 2,\\ x-4, & x<2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(4;-3)$, оставленная при $x\geq 2$. Точка $(2;1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x-4$ при $x<2$. Его конечная точка $(2;-2)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-2\leq m\leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(2;1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-2\leq m\leq 1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=9$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=7$. Сторона $BC=BK+CK=16$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(7+16)=46$.
Ответ: 46.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO=\angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 7$, $BC = 6$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 6$ и $BH = AC = 7$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 7|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-7)^2 + 6^2$.

После раскрытия скобок получаем $14R = 85$. Поэтому $R = \dfrac{85}{14}$.

Ответ: $\dfrac{85}{14}$.

Решения. Вариант 32

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А4 — размеры № 3, А2 — размеры № 1, А6 — размеры № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $2 \cdot 2^4 = 32$ листов.
Ответ: 32.

Задание 3

Размеры листа равны $10{,}5$ см и $14{,}8$ см.
Площадь $10{,}5 \cdot 14{,}8 = 155{,}4$ см^2.
Ответ: 155,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 100 \cdot 400}{1000} = 1{,}2432$ кг.
После округления получаем $1{,}2$ кг.
Ответ: 1,2.

Задание 5

Всего нужно $725 \cdot 2 = 1450$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1450}{400} \right\rceil = 4$.
Стоимость: $4 \cdot 340 = 1360$ руб.
Ответ: 1360.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $6 - \dfrac{6}{5} = \dfrac{24}{5}$.
Умножаем на 4 и получаем $19{,}2$.
Ответ: 19,2.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{70}$ приблизительно равно $8{,}367$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$20 + 2 = 22$.
Ответ: 22.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = \frac{5}{2}$.
$x = 17{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $5 \neq 0$.
Ответ: $17{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $43+4+3 = 50$. Благоприятных исходов 4, поэтому вероятность равна $\frac{4}{50} = 0{,}08$.
Ответ: $0{,}08$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-2}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = x - 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \frac{2S}{a+b} = \frac{2 \cdot 96}{11+21} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $2x \geq 4$. Делим на 2, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $[2; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 6 \cdot 3^5 = 1458$.
Ответ: 1458.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$. Длина положительна, поэтому $BC = 34$.
Ответ: 34.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 110^\circ : 2 = 55^\circ$.
Ответ: 55.

Задание 17

$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{20+6}{2} \cdot 11 = 143$.
Ответ: 143.

Задание 18

Основание равно 4, высота равна 4. Площадь параллелограмма $S = 4 \cdot 4 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 6x^2 - 49x - 294 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+6) - 49(x+6) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+6)(x^2-49) = (x+6)(x-7)(x+7) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-7;\ -6;\ 7$.
Ответ: $-7;\ -6;\ 7$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 14 км/ч, второго 17 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками 55 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $14(t - \frac{1}{2}) + 17t = 55$. Отсюда $31t = 62$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $17 \cdot 2 = 34$ км. Время движения первого $\frac{3}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 34 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+6x+6)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

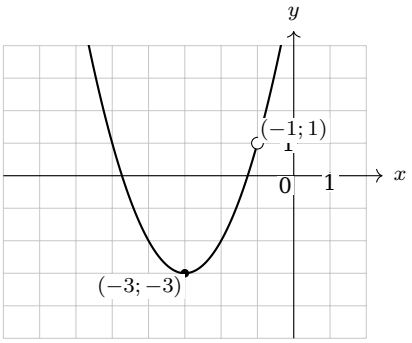
Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 6 = (x+3)^2 - 3$.

Строим параболу с вершиной $(-3;-3)$ и выколотой точкой $(-1;1)$.

При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -5 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 7$, $AC = 21$, $NC = 10$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 10$. По подобию $\dfrac{x}{x+10} = \dfrac{7}{21}$.

Отсюда $21x = 7(x+10)$, то есть $14x = 70$. Получаем $BN = 5$.

Ответ: 5.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.

В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.

Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 26$, $BC = 20$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{100}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 26 - \dfrac{100}{13} = \dfrac{238}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 20 \cdot \dfrac{\frac{238}{13}}{26} = \dfrac{2380}{169}$.

Ответ: $\dfrac{2380}{169}$.

Решения. Вариант 33

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 195, 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 185 \cdot \dfrac{60}{100} = 111$ мм.
Ответ: 111.

Задание 3

Диаметр диска: $15 \cdot 25{,}4 = 381$ мм.
Высота боковины: $195 \cdot \dfrac{60}{100} = 117$ мм.
$D = 381 + 2 \cdot 117 = 615$ мм.
Ответ: 615.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$195 \cdot \dfrac{55}{100} - 205 \cdot \dfrac{50}{100} = 4{,}75$ мм.
Ответ: 4,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $16 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 195 \cdot \dfrac{55}{100} = 620{,}9$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{620{,}9 - 615}{615} \cdot 100\% \approx 1\%$.
Ответ: 1.

Задание 6

Сумма в скобках равна $7{,}4$.
$7{,}4 : 0{,}4 = 18{,}5$.
Ответ: 18,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{244}$ приблизительно равно $-15{,}62$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{2 \cdot 2 - 3} = 2^1 = 2$.
Ответ: 2.

Задание 9

$8x = 45 - (-23) = 68$, поэтому $x = 8{,}5$.
Ответ: $8{,}5$.

Задание 10

На 7 делятся числа $7, 14, \ldots, 49$; их 7. Вероятность равна $\dfrac{7}{50} = 0{,}14$.
Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = -2x + 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{4{,}8 \cdot 8}{8 - 4{,}8} = 12$ Ом.
Ответ: 12.

Задание 13

Нули множителей: -12 и 0. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-12; 0]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{19} = 1 + (19-1) \cdot (-1) = -17$.
Ответ: -17.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 28° - 37° = 115°$.
Ответ: 115.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{14 \cdot 20}{2} = 140$.
Ответ: 140.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 5 и 2, поэтому площадь равна $5 \cdot 2 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{10}{x-24}+\dfrac{10}{x+24}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 24$ и $x\neq -24$.
Умножим уравнение на $(x-24)(x+24)$: $10(x+24)+10(x-24)=x^2-576$.
Получим $x^2-20x-576=0$, или $(x-10)^2=676=26^2$.
Поэтому $x=10-26=-16$ или $x=10+26=36$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-16;\ 36$.

Задание 21

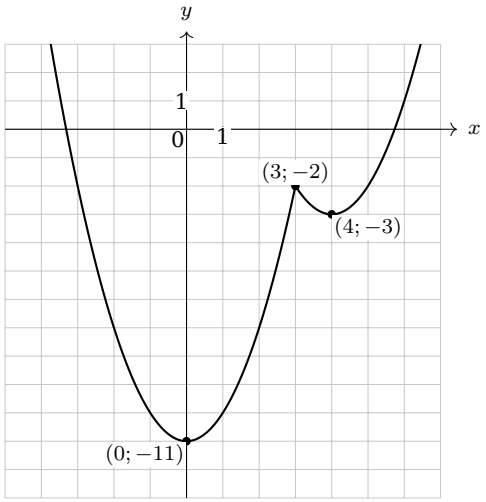
Имеются два сплава с содержанием меди 30% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{30}{100}x+\dfrac{70}{100}(60-x)=\dfrac{35}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $30x+4200-70x=2100$. Поэтому $40x=2100$ и $x=\dfrac{105}{2}$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{105}{2}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 4x + 1 - 4|x - 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 6t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t - 2$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-3; -11)$ и $(1; -3)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -11$ пересечений нет; при $m = -11$ одно; при $-11 < m < -3$ два; при $m = -3$ три.
При $-3 < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -3$ или $m = -2$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 26, а основание равно 20. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 24 = 240$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{26 \cdot 26 \cdot 20}{4 \cdot 240} = \dfrac{169}{12}$.
Ответ: $\dfrac{169}{12}$.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 16$, $CD = 34$, основание $BC = 2$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 34 - 2 = 32$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 16$, $AP = BC = 2$, $PD = AD - BC = 30$.
В треугольнике CPD выполняется $16^2 + 30^2 = 34^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 16.
Площадь $S = \dfrac{32 + 2}{2} \cdot 16 = 272$.
Ответ: 272.

Решения. Вариант 34

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

жилой дом — 3; баня — 6; яблони — 5; теплица — 1.
Ответ: 3651.

Задание 2

Дорожки занимают $10 + 6 + 12 - 2 = 26$ м^2: два пересечения вычитаем, чтобы не считать их дважды.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 26 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{26}{4} \right\rceil = 7$.
Ответ: 7.

Задание 3

Дом занимает прямоугольник 5×4 клетки без выреза 3×1 клетку: $5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $17 \cdot 4 = 68$ м^2.
Ответ: 68.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Расстояние $\sqrt{(4 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 2)^2} = 10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(23000 + 13400) - (18000 + 10000) = 8400$ руб.
Газ за час: $1{,}2 \cdot 5 = 6$ руб.; электричество: $6 \cdot 4{,}5 = 27$ руб.
Экономия за час равна 21 руб. Срок: $8400 : 21 = 400$ ч.
Ответ: 400.

Задание 6

$(-10)^2 = 100$, $12^2 = 144$. Поэтому значение выражения равно $100 - 144 = -44$.
Ответ: -44.

Задание 7

Значение числа $\frac{38}{7}$ приблизительно равно $5{,}429$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{210} + 14 - 2\sqrt{210} = 29$.
Ответ: 29.

Задание 9

Разложение на множители: $(x)(x - 7) = 0$. Корни: 0 и 7.
Требуемый корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 22 = 178$. Вероятность равна $\dfrac{178}{200} = 0{,}89$.

Ответ: $0{,}89$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 32}{4^2} = 4$ кг.

Ответ: 4.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 2$, второе — $x \leq 13$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(2; 13]$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 17-го ряда число мест увеличивается 16 раз: $14 + 16 \cdot 5 = 94$.
Ответ: 94.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$, поэтому каждый равен 69°.
Ответ: 69.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 11 \cdot 9 = 99$.
Ответ: 99.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 4 и 3. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Утверждение 3 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 17t + 16 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 16) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 16$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 16$ — $x = \pm 4$.
Ответ: $-4;\ -1;\ 1;\ 4$.

Задание 21

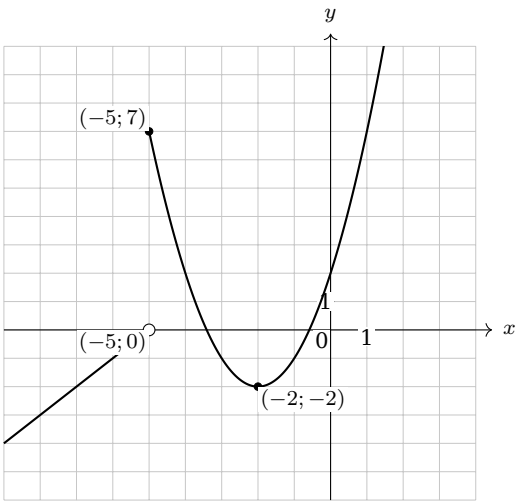
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 216 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{216}{x} - \dfrac{216}{x+3} = 1$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $648 = 1x(x+3)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 24)(x + 27) = 0$.
Корень $x = -27$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 24 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+2)^2-2, & x\geq -5,\\ x+5, & x<-5.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2;-2)$, оставленная при $x\geq -5$. Точка $(-5;7)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+5$ при $x<-5$. Его конечная точка $(-5;0)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 7$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>7$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 7 включена, поскольку точка $(-5;7)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $0\leq m\leq 7$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 36 и 9. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $36+9=45$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=45\cdot 36$ и $v^2=45\cdot 9$.
Поэтому $u=18\sqrt{5}$, $v=9\sqrt{5}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=45+27\sqrt{5}$.
Ответ: $45+27\sqrt{5}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 9$, $MD = 7$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 49$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{49}{9} = \dfrac{49}{9}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 9 - \dfrac{49}{9} = \dfrac{32}{9}$.
Ответ: $\dfrac{32}{9}$.

Решения. Вариант 35

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

коридор — 2; кухня — 7; гостиная — 6; спальня — 4.
Ответ: 2764.

Задание 2

Пол спальни занимает 99 клеток, его площадь $99 \cdot 0{,}4^2 = 15{,}84$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ м^2. Требуется $15{,}84 : 0{,}08 = 198$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{198}{10} \right\rceil = 20$ целых упаковок.
Ответ: 20.

Задание 3

На плане помещение занимает 20 клеток.
Его площадь $20 \cdot 0{,}4^2 = 3{,}2$ м^2.
Ответ: 3,2.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 99 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{99-30}{30} \cdot 100\% = 230\%$.
Ответ: 230.

Задание 5

Тариф «А»: $370 + 12 \cdot 60 = 1090$ руб.
Тариф «Б»: $520 + 2 \cdot 30 = 580$ руб.
Безлимитный тариф стоит 780 руб. Наименьшая плата — 580 руб.
Ответ: 580.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{19}{8} - \dfrac{17}{10} = \dfrac{27}{40}$.
Умножаем на 5 и получаем $3{,}375$.
Ответ: 3,375.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{153}$ приблизительно равно $12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$10 + 2 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -8$. Из равенства получаем $x - (-8) = \frac{3}{5}$.
$x = -7{,}4$. Это значение допустимо, так как числитель $3 \neq 0$.
Ответ: $-7{,}4$.

Задание 10

Всего шаров $42 + 29 + 29 = 100$. Благоприятных исходов 29, поэтому вероятность равна $\frac{29}{100} = 0{,}29$.
Ответ: $0{,}29$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 104$: $C = \frac{5}{9}(104 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (72) = 40$.
Ответ: 40.

Задание 13

$196 = 14^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 14.
Множество решений: $(-\infty; -14] \cup [14; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 9 \cdot 3^5 = 2187$.
Ответ: 2187.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$. Длина положительна, поэтому $BC = 34$.
Ответ: 34.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $68 : 2 = 34$. Вторая сторона: $34 - 18 = 16$.
Площадь равна $18 \cdot 16 = 288$.
Ответ: 288.

Задание 18

Основание занимает 4 клеток, высота — 5 клеток. Площадь равна $\dfrac{4\cdot 5}{2}=10$.

Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4,\\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=4-x$. Подставим во второе: $x^2+(4-x)^2=10$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-4x+3=0$.
Разложим на множители: $(x-1)(x-3)=0$. Следовательно, $x=1$ или $x=3$.
При $x=1$ первое уравнение даёт $y=3$; при $x=3$ получаем $y=1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 4, сумма их квадратов равна 10.
Ответ: $(x;y)=(1;3)$ или $(x;y)=(3;1)$.

Задание 21

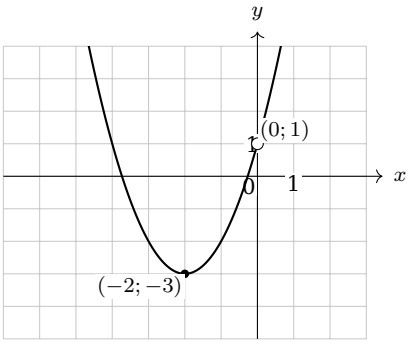
Моторная лодка прошла 44 км по течению реки и 36 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>2$. Скорости по течению и против течения равны $x+2$ и $x-2$.
Уравнение времени: $\dfrac{44}{x+2}+\dfrac{36}{x-2}=4$.
После умножения на $(x+2)(x-2)$ и приведения получаем $4x^2-80x=0$. Его корни: $x=20$ и $x=0$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>2$. Для $x=20$ времена равны 2 ч и 2 ч, их сумма 4 ч.
Ответ: 20 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+4x+1)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(-2; -3)$ и выколотой точкой $(0; 1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 10$, $BF = 24$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{100 + 576} = 26$.
Ответ: 26.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 9$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{9}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 9/\cos 45^\circ = 9\sqrt{2}$.

Ответ: $9\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 36

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Журавушка — 1; Васильково — 4; Камышино — 3.
Ответ: 143.

Задание 2

Путь занимает 11 клеток.
Длина пути равна $11 \cdot 1 = 11$ км.
Ответ: 11.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 16 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ км.
Ответ: 20.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{20} \cdot 60 + \frac{13}{10} \cdot 60 = 111$.
Ответ: 111.

Задание 5

Васильково: $4 \cdot 52 + 1{,}5 \cdot 610 + 1 \cdot 838 = 1961$ руб.
Иваново: $4 \cdot 47 + 1{,}5 \cdot 634 + 1 \cdot 859 = 1998$ руб.
Камышино: $4 \cdot 55 + 1{,}5 \cdot 655 + 1 \cdot 829 = 2031{,}5$ руб.
Журавушка: $4 \cdot 62 + 1{,}5 \cdot 625 + 1 \cdot 814 = 1999{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — 1961 руб.
Ответ: 1961.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}3$.
$9{,}3 : 0{,}4 = 23{,}25$.
Ответ: 23,25.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{385}$ приблизительно равно $-19{,}621$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{3 \cdot 2 - 5} = 5^1 = 5$.
Ответ: 5.

Задание 9

$4x = 40 - (20) = 20$, поэтому $x = 5$.
Ответ: 5.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 18$; их 2. Вероятность равна $\dfrac{2}{20} = 0{,}1$.

Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -2x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 186}{5 + 26} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 13

Получаем $4x > 28$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(7; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{25} = 9 + (25 - 1) \cdot (1) = 33$.
Ответ: 33.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 37° - 31° = 112°$.
Ответ: 112.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 48° : 2 = 24°$.
Ответ: 24.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{17 + 8}{2} \cdot 9 = 112{,}5$.
Ответ: $112{,}5$.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 5 = 17{,}5$.

Ответ: $17{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-81}{x-1}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 1$. Разложим числитель: $x^2-81=(x-9)(x+9)$.
Критические точки: -9, 1, 9. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -9 и 9 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-9]\cup(1;9]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $4{,}8$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 18 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+18$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+18)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+18}=\dfrac{5}{24}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+18)=\dfrac{24}{5}(2x+18)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=6$ и $x=-\dfrac{72}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{5}{24}$, поэтому время совместной работы равно $4{,}8$ ч.
Ответ: 6 ч.

Задание 22

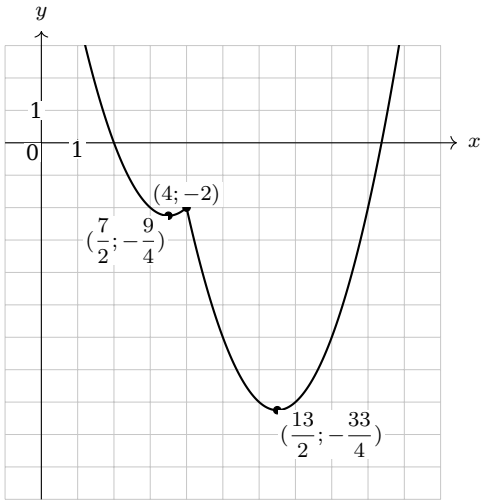
Постройте график функции $y = x^2 - 10x + 22 - 3|x - 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 2$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.

При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 10$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 8$. Сторона $BC = BK + CK = 18$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(8 + 18) = 52$.

Ответ: 52.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 8$, $BC = 11$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 11$ и $BH = AC = 8$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 8|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-8)^2 + 11^2$.

После раскрытия скобок получаем $16R = 185$. Поэтому $R = \dfrac{185}{16}$.

Ответ: $\dfrac{185}{16}$.

Решения. Вариант 37

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Берёзовка — 4; Озёрное — 1; Луговое — 2.
Ответ: 412.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $6 + 15 + 20 = 41$ км.
Ответ: 41.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 21 и 20 км.
Её длина $\sqrt{21^2 + 20^2} = 29$ км.
Ответ: 29.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 6 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 25 км.
Время: $\dfrac{6}{48} \cdot 60 + \dfrac{25}{24} \cdot 60 = 70$ мин.
Ответ: 70.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{41 \cdot 8{,}5}{100} \cdot 63 = 219{,}555$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{29 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 63 = 191{,}835$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{6 \cdot 8{,}5 + 25 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 63 = 197{,}505$ руб.
Наименьшая стоимость — $191{,}835$ руб.
Ответ: 191,835.

Задание 6

$(-16)^2 = 256$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $256 - 4 = 252$.
Ответ: 252.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{122}{13}$ приблизительно равно $9{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{105} + 7 - 2\sqrt{105} = 22$.
Ответ: 22.

Задание 9

Разложение на множители: $(x - 3)(x - 11) = 0$. Корни: 3 и 11.
Требуемый корень равен 11.
Ответ: 11.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 23 = 177$. Вероятность равна $\dfrac{177}{200} = 0{,}885$.

Ответ: $0{,}885$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{18 \cdot 30}{30 - 18} = 45$ Ом.

Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -10 и -1. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-10; -1)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 14-го ряда число мест увеличивается 13 раз: $18 + 13 \cdot 5 = 83$.
Ответ: 83.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, поэтому каждый равен 60°.
Ответ: 60.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$.

Ответ: 30.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 3 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 16(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-16) = (x+2)(x-4)(x+4) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-4;\ -2;\ 4$.
Ответ: $-4;\ -2;\ 4$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 15 км/ч, второго 13 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками $44{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

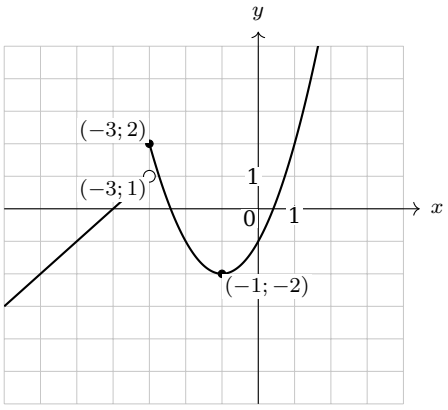
Сумма путей: $15(t - \dfrac{3}{4}) + 13t = \dfrac{179}{4}$. Отсюда $28t = 56$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $13 \cdot 2 = 26$ км. Время движения первого $\dfrac{5}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 26 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2-2, & x\geq -3,\\ x+4, & x<-3.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;-2)$, оставленная при $x\geq -3$. Точка $(-3;2)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+4$ при $x<-3$. Его конечная точка $(-3;1)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 2$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>2$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 2 включена, поскольку точка $(-3;2)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $1\leq m\leq 2$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=3$, $AC=12$, $NC=11$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+11$. По подобию $\dfrac{x}{x+11}=\dfrac{3}{12}$.

Отсюда $12x=3(x+11)$, то есть $9x=33$. Получаем $BN=\dfrac{11}{3}$.

Ответ: $\dfrac{11}{3}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 34$, $BC = 32$.
Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{256}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 34 - \dfrac{256}{17} = \dfrac{322}{17}$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны.

Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 32 \cdot \dfrac{\frac{322}{17}}{34} = \dfrac{5152}{289}$.

Ответ: $\dfrac{5152}{289}$.

Решения. Вариант 38

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м^3 — печь № 3, 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

$V = 3{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}2 = 18{,}7$ м^3.
Ответ: 18,7.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $42 : 2 = 21$ см и 28 см.
$R = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$ см.
Ответ: 35.

Задание 4

После скидки остаётся 90% цены. Получаем $30400 \cdot \dfrac{90}{100} = 27360$ руб.
Ответ: 27360.

Задание 5

Объём парной равен $18{,}7$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $30400 + 900 = 31300$ руб.
Печь № 3: $25600 + 900 + 5100 = 31600$ руб.
Наименьшая сумма — 31300 руб.
Ответ: 31300.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{3}{10} - 1 = -\dfrac{7}{10}$.
Умножаем на 5 и получаем $-3{,}5$.
Ответ: $-3{,}5$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{260}$ приблизительно равно $16{,}125$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$7 + 3 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -8$. Из равенства получаем $x - (-8) = -\dfrac{27}{4}$.
$x = -14{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-27 \neq 0$.
Ответ: $-14{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $55 + 9 + 36 = 100$. Благоприятных исходов 9, поэтому вероятность равна $\dfrac{9}{100} = 0{,}09$.
Ответ: $0{,}09$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 405}{9^2} = 10$ кг.
Ответ: 10.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -8$, второе — $x \le 1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-8; 1]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 8 \cdot 3^6 = 5832$.
Ответ: 5832.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 10^2 = 676$. Длина положительна, поэтому $BC = 26$.
Ответ: 26.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 13 : 2 = 6{,}5$.
Ответ: $6{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 16 \cdot 4 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 4, поэтому площадь равна $4 \cdot 4 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{16}{x-30}+\frac{16}{x+30}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 30$ и $x\neq -30$.
Умножим уравнение на $(x-30)(x+30)$: $16(x+30)+16(x-30)=x^2-900$.
Получим $x^2-32x-900=0$, или $(x-16)^2=1156=34^2$.
Поэтому $x=16-34=-18$ или $x=16+34=50$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-18;\ 50$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 10% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\frac{10}{100}x+\frac{75}{100}(60-x)=\frac{40}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $10x+4500-75x=2400$. Поэтому $65x=2100$ и $x=\frac{420}{13}$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{420}{13}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2+2x-2)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

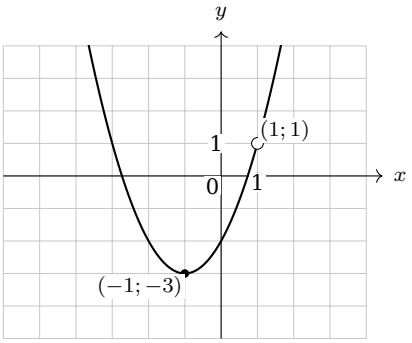
Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$.

Строим параболу с вершиной $(-1;-3)$ и выколотой точкой $(1;1)$.

При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 34, а основание равно 32. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 30 = 480$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{34 \cdot 34 \cdot 32}{4 \cdot 480} = \dfrac{289}{15}$.

Ответ: $\dfrac{289}{15}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.

Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.

Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.

В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 30$, $CD = 34$, основание $BC = 9$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 34 - 9 = 25$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 30$, $AP = BC = 9$, $PD = AD - BC = 16$.
В треугольнике CPD выполняется $30^2 + 16^2 = 34^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 30.
Площадь $S = \dfrac{25 + 9}{2} \cdot 30 = 510$.
Ответ: 510.

Решения. Вариант 39

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 350 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 3, 4, 6, 7, 8.
Всего таких месяцев — 6.
Ответ: 6.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{12+14+8+16}{4} = 12{,}5$ ГБ.
Ответ: $12{,}5$.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 12 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 2 ГБ.
Плата: $490 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 65 = 620$ руб.
Ответ: 620.

Задание 5

За месяц № 8 использовано 600 минут и 16 ГБ.
«Основной»: $490 + 250 \cdot 2 + 6 \cdot 65 = 1380$ руб.
«Расширенный»: $710 + 100 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 910$ руб.
Наименьшая плата — 910 руб.
Ответ: 910.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}9$.
$9{,}9 : 0{,}5 = 19{,}8$.
Ответ: $19{,}8$.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{41}$ приблизительно равно $-6{,}403$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{4\cdot 2-6} = 2^2 = 4$.
Ответ: 4.

Задание 9

$8x = 56 - (-20) = 76$, поэтому $x = 9{,}5$.
Ответ: $9{,}5$.

Задание 10

На 4 делятся числа $4, 8, \ldots, 100$; их 25. Вероятность равна $\dfrac{25}{100} = 0{,}25$.

Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 3x - 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 86$: $C = \dfrac{5}{9}(86 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (54) = 30$.

Ответ: 30.

Задание 13

$4 = 2^2$. Требуются числа, модуль которых больше 2.
Множество решений: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{11} = 13 + (11 - 1) \cdot (-6) = -47$.
Ответ: -47.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 40° - 72° = 68°$.
Ответ: 68.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $48 : 2 = 24$. Вторая сторона: $24 - 8 = 16$.
Площадь равна $8 \cdot 16 = 128$.
Ответ: 128.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 3 и 4.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 29t + 100 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 25) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 25$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 25$ — $x = \pm 5$.
Ответ: $-5;\ -2;\ 2;\ 5$.

Задание 21

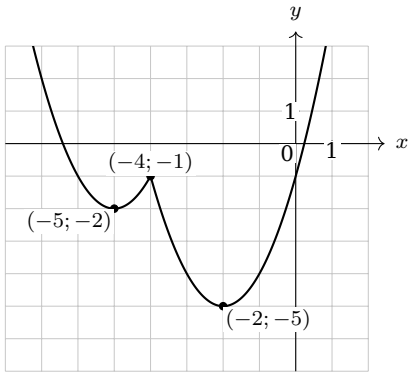
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 80 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{80}{x} - \dfrac{80}{x+4} = 1$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $320 = 1x(x+4)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 16)(x + 20) = 0$.
Корень $x = -20$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 16 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 7x + 11 - 3|x + 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 4t - 1$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; -2)$ и $(2; -5)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.
При $m < -5$ пересечений нет; при $m = -5$ одно; при $-5 < m < -2$ два; при $m = -2$ три.
При $-2 < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -2$ или $m = -1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 8 и 32. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $8 + 32 = 40$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 40{\cdot}8$ и $v^2 = 40{\cdot}32$. Поэтому $u = 8\sqrt{5}$, $v = 16\sqrt{5}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 40 + 24\sqrt{5}$.
Ответ: $40 + 24\sqrt{5}$.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 10$, $MD = 8$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 64$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{64}{10} = \dfrac{32}{5}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 10 - \dfrac{32}{5} = \dfrac{18}{5}$.
Ответ: $\dfrac{18}{5}$.

Решения. Вариант 40

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А4 — размеры № 2, А6 — размеры № 3, А2 — размеры № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

При переходе от А1 к А5 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $2 \cdot 2^4 = 32$ листов.
Ответ: 32.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 120 \cdot 500}{1000} = 1{,}8648$ кг.
После округления получаем $1{,}9$ кг.
Ответ: 1,9.

Задание 5

Всего нужно $760 \cdot 3 = 2280$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2280}{500} \right\rceil = 5$.
Стоимость: $5 \cdot 360 = 1800$ руб.
Ответ: 1800.

Задание 6

$(-8)^2 = 64$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $64 - 16 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{171}{13}$ приблизительно равно $13{,}154$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $6 + 2\sqrt{60} + 10 - 2\sqrt{60} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 3)(x - 10) = 0$. Корни: -3 и 10.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 21 = 979$. Вероятность равна $\dfrac{979}{1000} = 0{,}979$.

Ответ: $0{,}979$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 87}{11 + 18} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $-5x \geq 5$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; -1]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 22-го ряда число мест увеличивается 21 раз: $22 + 21 \cdot 3 = 85$.

Ответ: 85.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, поэтому каждый равен 25°.

Ответ: 25.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

Ответ: 75.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{27 + 10}{2} \cdot 9 = 166{,}5$.

Ответ: $166{,}5$.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 2 клеток. Площадь равна $\dfrac{8 \cdot 2}{2} = 8$.

Ответ: 8.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=6-x$. Подставим во второе: $x^2+(6-x)^2=20$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-6x+8=0$.
Разложим на множители: $(x-2)(x-4)=0$. Следовательно, $x=2$ или $x=4$.
При $x=2$ первое уравнение даёт $y=4$; при $x=4$ получаем $y=2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 6, сумма их квадратов равна 20.
Ответ: $(x;y)=(2;4)$ или $(x;y)=(4;2)$.

Задание 21

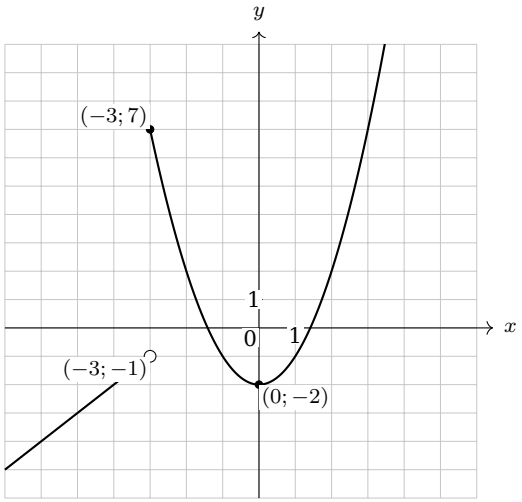
Моторная лодка прошла 50 км по течению реки и 57 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{50}{x+3}+\dfrac{57}{x-3}=5$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $5x^2-107x-66=0$. Его корни: $x=22$ и $x=-\dfrac{3}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=22$ времена равны 2 ч и 3 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 22 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x)^2 - 2, & x \geq -3, \\ x + 2, & x < -3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0; -2)$, оставленная при $x \geq -3$. Точка $(-3; 7)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < -3$. Его конечная точка $(-3; -1)$ выколота.
При $m < -2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2 < m < -1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1 \leq m \leq 7$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 7$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 7 включена, поскольку точка $(-3; 7)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -2$ или $-1 \leq m \leq 7$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 16$, $BF = 30$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{256 + 900} = 34$.
Ответ: 34.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 5$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 10/\cos 60^\circ = 20$.
Ответ: 20.

Решения. Вариант 41

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 195 \cdot \dfrac{60}{100} = 117$ мм.
Ответ: 117.

Задание 3

Диаметр диска: $16 \cdot 25{,}4 = 406{,}4$ мм.
Высота боковины: $205 \cdot \dfrac{60}{100} = 123$ мм.
$D = 406{,}4 + 2 \cdot 123 = 652{,}4$ мм.
Ответ: 652,4.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$205 \cdot \dfrac{55}{100} - 215 \cdot \dfrac{50}{100} = 5{,}25$ мм.
Ответ: 5,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $17 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 205 \cdot \dfrac{55}{100} = 657{,}3$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{657{,}3 - 652{,}4}{652{,}4} \cdot 100\% \approx 0{,}8\%$.
Ответ: 0,8.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $3 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4}$.
Умножаем на 2 и получаем 5,5.
Ответ: 5,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{436}$ приблизительно равно $20{,}881$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 1 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -10$. Из равенства получаем $x - (-10) = -\dfrac{11}{2}$.
$x = -15{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-22 \neq 0$.
Ответ: $-15{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $10 + 15 + 25 = 50$. Благоприятных исходов 15, поэтому вероятность равна $\dfrac{15}{50} = 0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{8{,}4 \cdot 14}{14 - 8{,}4} = 21$ Ом.
Ответ: 21.

Задание 13

Нули множителей: -3 и 0. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-3; 0]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 7 \cdot 2^6 = 448$.
Ответ: 448.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{10 \cdot 8}{2} = 40$.

Ответ: 40.

Задание 18

Основания равны 2 и 5, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{2+5}{2} \cdot 3 = 10{,}5$.

Ответ: $10{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 100}{x - 1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 1$. Разложим числитель: $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$.
Критические точки: -10, 1, 10. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -10 и 10 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty; -10] \cup (1; 10]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $4{,}8$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 4 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x + 4$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+4)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{5}{24}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+4) = \dfrac{24}{5}(2x+4)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 8$ и $x = -\dfrac{12}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

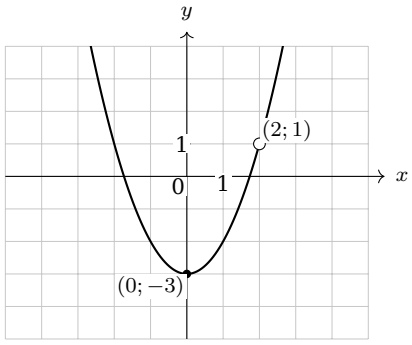
Проверка: $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{24}$, поэтому время совместной работы равно $4{,}8$ ч.

Ответ: 8 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2-3)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(0; -3)$ и выколотой точкой $(2; 1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 9$, $CK = 11$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 9$. Сторона $BC = BK + CK = 20$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(9 + 20) = 58$.
Ответ: 58.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 5$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 5$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 5^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 34$. Поэтому $R = \dfrac{17}{3}$.

Ответ: $\dfrac{17}{3}$.

Решения. Вариант 42

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

сарай — 4; жилой дом — 3; баня — 6; яблони — 5.
Ответ: 4365.

Задание 2

Дорожки занимают $10 + 6 + 12 - 2 = 26$ м^2: два пересечения вычитаем, чтобы не считать их дважды.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 26 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{26}{8} \right\rceil = 4$.
Ответ: 4.

Задание 3

Сарай занимает $2 \cdot 3 = 6$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $6 \cdot 4 = 24$ м^2.
Ответ: 24.

Задание 4

Высоты построек на плане перекрываются; горизонтальный промежуток между ними составляет 4 клетки.
Расстояние равно $4 \cdot 2 = 8$ м.
Ответ: 8.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(26000 + 23000) - (20000 + 11000) = 18000$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$ руб.; электричество: $10 \cdot 4{,}5 = 45$ руб.
Экономия за час равна $37{,}5$ руб. Срок: $18000 : 37{,}5 = 480$ ч.
Ответ: 480.

Задание 6

Сумма в скобках равна $6{,}2$.
$6{,}2 : 0{,}4 = 15{,}5$.
Ответ: 15,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{118}$ приблизительно равно $-10{,}863$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{2 \cdot 2 - 1} = 5^3 = 125$.
Ответ: 125.

Задание 9

$8x = -29 - (7) = -36$, поэтому $x = -4{,}5$.
Ответ: $-4{,}5$.

Задание 10

На 4 делятся числа $4, 8, \ldots, 40$; их 10. Вероятность равна $\dfrac{10}{40} = 0{,}25$.

Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = 3x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 300}{10^2} = 6$ кг.

Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 2$, второе — $x \le 8$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(2; 8]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{16} = 24 + (16-1) \cdot (-3) = -21$.
Ответ: -21.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 32° - 60° = 88°$.
Ответ: 88.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 20 : 2 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 8 \cdot 10 = 80$.
Ответ: 80.

Задание 18

Основание равно 5, высота равна 4. Площадь параллелограмма $S = 5 \cdot 4 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 25x - 75 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+3) - 25(x+3) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+3)(x^2-25) = (x+3)(x-5)(x+5) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-5;\ -3;\ 5$.
Ответ: $-5;\ -3;\ 5$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 10 км/ч, второго 16 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $75{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

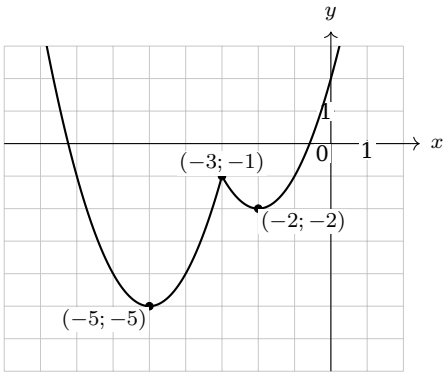
Сумма путей: $10(t - \frac{1}{4}) + 16t = \frac{151}{2}$. Отсюда $26t = 78$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $16 \cdot 3 = 48$ км. Время движения первого $\frac{11}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 48 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 7x + 11 - 3|x + 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t - 1$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -5)$ и $(1; -2)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.
При $m < -5$ пересечений нет; при $m = -5$ одно; при $-5 < m < -2$ два; при $m = -2$ три.
При $-2 < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -2$ или $m = -1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 4$, $AC = 8$, $NC = 12$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 12$. По подобию $\dfrac{x}{x + 12} = \dfrac{4}{8}$.
Отсюда $8x = 4(x + 12)$, то есть $4x = 48$. Получаем $BN = 12$.
Ответ: 12.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 15$, $BC = 18$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{54}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 15 - \dfrac{54}{5} = \dfrac{21}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 18 \cdot \dfrac{\frac{21}{5}}{15} = \dfrac{126}{25}$.

Ответ: $\dfrac{126}{25}$.

Решения. Вариант 43

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

коридор — 2; санузел — 1; гостиная — 6; кухня — 7.
Ответ: 2167.

Задание 2

Пол спальни занимает 99 клеток, его площадь $99 \cdot 0{,}5^2 = 24{,}75$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ м^2. Требуется $24{,}75 : 0{,}25 = 99$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{99}{12} \right\rceil = 9$ целых упаковок.
Ответ: 9.

Задание 3

На плане помещение занимает 90 клеток.
Его площадь $90 \cdot 0{,}5^2 = 22{,}5$ м^2.
Ответ: 22,5.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 156 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{156 - 30}{30} \cdot 100\% = 420\%$.
Ответ: 420.

Задание 5

Тариф «А»: $380 + 18 \cdot 50 = 1280$ руб.
Тариф «Б»: $530 + 8 \cdot 35 = 810$ руб.
Безлимитный тариф стоит 795 руб. Наименьшая плата — 795 руб.
Ответ: 795.

Задание 6

$(-12)^2 = 144$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $144 - 49 = 95$.
Ответ: 95.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{191}{11}$ приблизительно равно $17{,}364$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $17 + 2\sqrt{255} + 15 - 2\sqrt{255} = 32$.
Ответ: 32.

Задание 9

Разложение на множители: $(x - 4)(x - 5) = 0$. Корни: 4 и 5.
Требуемый корень равен 5.
Ответ: 5.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 13 = 487$. Вероятность равна $\frac{487}{500} = 0{,}974$.
Ответ: $0{,}974$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 41$: $C = \frac{5}{9}(41 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (9) = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

$169 = 13^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 13.
Множество решений: $(-\infty; -13] \cup [13; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $14 + 20 \cdot 3 = 74$.
Ответ: 74.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$, поэтому каждый равен 28°.
Ответ: 28.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 16 : 2 = 8$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52 : 2 = 26$. Вторая сторона: $26 - 14 = 12$.
Площадь равна $14 \cdot 12 = 168$.
Ответ: 168.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 6 и 5, поэтому площадь равна $6 \cdot 5 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{9}{x-12}+\dfrac{9}{x+12}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 12$ и $x\neq -12$.
Умножим уравнение на $(x-12)(x+12)$: $9(x+12)+9(x-12)=x^2-144$.
Получим $x^2-18x-144=0$, или $(x-9)^2=225=15^2$.
Поэтому $x=9-15=-6$ или $x=9+15=24$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-6;\ 24$.

Задание 21

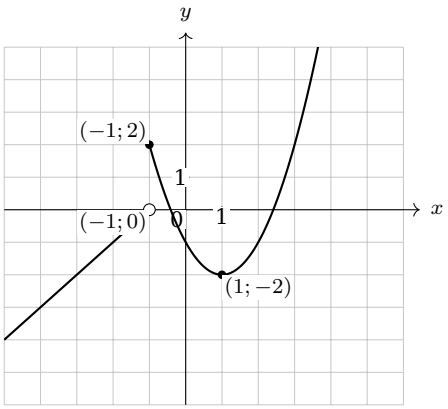
Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{15}{100}x+\dfrac{65}{100}(60-x)=\dfrac{45}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $15x+3900-65x=2700$. Поэтому $50x=1200$ и $x=24$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 24 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-1)^2-2, & x\geq -1,\\ x+1, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(1;-2)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;2)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+1$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;0)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 2$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>2$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 2 включена, поскольку точка $(-1;2)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $0\leq m\leq 2$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 15, а основание равно 18. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{15 \cdot 15 \cdot 18}{4 \cdot 108} = \dfrac{75}{8}$.

Ответ: $\dfrac{75}{8}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.

У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.

Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 36$, $CD = 39$, основание $BC = 12$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 39 - 12 = 27$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 36$, $AP = BC = 12$, $PD = AD - BC = 15$.

В треугольнике CPD выполняется $36^2 + 15^2 = 39^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 36.

Площадь $S = \dfrac{27 + 12}{2} \cdot 36 = 702$.

Ответ: 702.

Решения. Вариант 44

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Журавушка — 1; Иваново — 2; Камышино — 3.
Ответ: 123.

Задание 2

Путь занимает 16 клеток.
Длина пути равна $16 \cdot 2 = 32$ км.
Ответ: 32.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 32 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ км.
Ответ: 40.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\frac{22}{20} \cdot 60 + \frac{26}{12} \cdot 60 = 196$.
Ответ: 196.

Задание 5

Васильково: $5 \cdot 48 + 0{,}5 \cdot 639 + 2 \cdot 866 = 2291{,}5$ руб.
Иваново: $5 \cdot 56 + 0{,}5 \cdot 660 + 2 \cdot 836 = 2282$ руб.
Камышино: $5 \cdot 63 + 0{,}5 \cdot 630 + 2 \cdot 821 = 2272$ руб.
Журавушка: $5 \cdot 53 + 0{,}5 \cdot 615 + 2 \cdot 845 = 2262{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — 2262,5 руб.
Ответ: 2262,5.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{22}{5} - \frac{3}{2} = \frac{29}{10}$.
Умножаем на 4 и получаем 11,6.
Ответ: 11,6.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{62}$ приблизительно равно 7,874. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$4 + 2 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = -12$.
$x = 3$. Это значение допустимо, так как числитель $-24 \neq 0$.
Ответ: 3.

Задание 10

Всего шаров $3 + 11 + 6 = 20$. Благоприятных исходов 11, поэтому вероятность равна $\dfrac{11}{20} = 0{,}55$.
Ответ: $0{,}55$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a + b} = \dfrac{2 \cdot 216}{9 + 18} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 13

Получаем $4x > 8$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(2; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 9 \cdot 3^3 = 243$.
Ответ: 243.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 60^2 + 32^2 = 4624$. Длина положительна, поэтому $BC = 68$.
Ответ: 68.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 130^\circ : 2 = 65^\circ$.
Ответ: 65.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{15 + 10}{2} \cdot 5 = 62{,}5$.
Ответ: $62{,}5$.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 12 и 5. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 2 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 45t + 324 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.
Ответ: $-6;\ -3;\ 3;\ 6$.

Задание 21

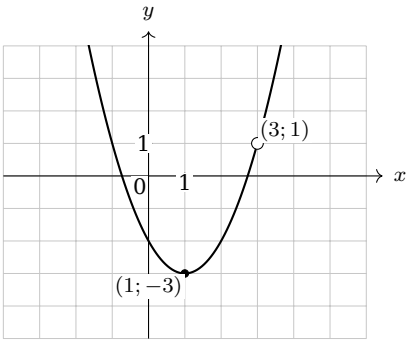
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 60 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{60}{x} - \dfrac{60}{x+2} = 1$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $120 = 1x(x+2)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 10)(x + 12) = 0$.
Корень $x = -12$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 10 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 10 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-2x-2)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(1;-3)$ и выколотой точкой $(3;1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 9 и 16. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $9 + 16 = 25$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 25{\cdot}9$ и $v^2 = 25{\cdot}16$.
Поэтому $u = 15$, $v = 20$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 60$.
Ответ: 60.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 6$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.
Ответ: $\dfrac{9}{2}$.

Решения. Вариант 45

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 2; Берёзовка — 1; Сосновка — 4.
Ответ: 214.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $11 + 7 + 24 = 42$ км.
Ответ: 42.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 7 и 24 км.
Её длина $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ км.
Ответ: 25.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 11 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 25 км.
Время: $\dfrac{11}{100} \cdot 60 + \dfrac{25}{50} \cdot 60 = 36{,}6$ мин.
Ответ: 36,6.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{42 \cdot 9}{100} \cdot 65 = 245{,}7$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{30 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 65 = 224{,}25$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{11 \cdot 9 + 25 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 65 = 251{,}225$ руб.
Наименьшая стоимость — $224{,}25$ руб.
Ответ: 224,25.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}9$.
$11{,}9 : 0{,}2 = 59{,}5$.
Ответ: 59,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{207}$ приблизительно равно $-14{,}387$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{2 \cdot 2 - 1} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$4x = 62 - (-4) = 66$, поэтому $x = 16{,}5$.
Ответ: 16,5.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 40$; их 5. Вероятность равна $\frac{5}{40} = 0{,}125$.
Ответ: $0{,}125$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -2x$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = 2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{2{,}4 \cdot 4}{4 - 2{,}4} = 6$ Ом.
Ответ: 6.

Задание 13

Нули множителей: 2 и 6. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(2; 6)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{17} = -19 + (17 - 1) \cdot (-7) = -131$.
Ответ: -131.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 39° - 61° = 80°$.
Ответ: 80.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$.
Ответ: 96.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 2 клеток. Площадь равна $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=8, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=8-x$. Подставим во второе: $x^2+(8-x)^2=34$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-8x+15=0$.
Разложим на множители: $(x-3)(x-5)=0$. Следовательно, $x=3$ или $x=5$.
При $x=3$ первое уравнение даёт $y=5$; при $x=5$ получаем $y=3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 8, сумма их квадратов равна 34.
Ответ: $(x;y)=(3;5)$ или $(x;y)=(5;3)$.

Задание 21

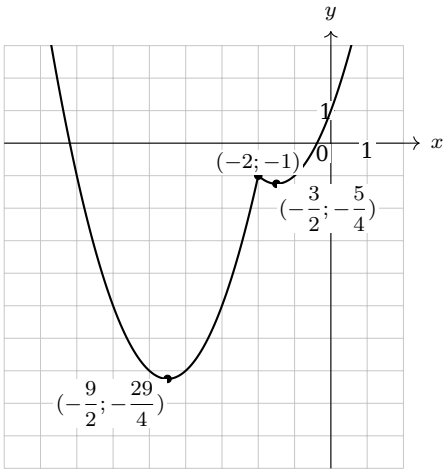
Моторная лодка прошла 56 км по течению реки и 20 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>4$. Скорости по течению и против течения равны $x+4$ и $x-4$.
Уравнение времени: $\dfrac{56}{x+4}+\dfrac{20}{x-4}=3$.
После умножения на $(x+4)(x-4)$ и приведения получаем $3x^2-76x+96=0$. Его корни: $x=24$ и $x=\dfrac{4}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>4$. Для $x=24$ времена равны 2 ч и 1 ч, их сумма 3 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 6x + 7 - 3|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t - 1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$ и $(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.
При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{5}{4}$ два; при $m = -\frac{5}{4}$ три.
При $-\frac{5}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{5}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 9$, $BF = 12$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 11$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{11}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 11/\cos 30^\circ = \dfrac{22\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$.

Решения. Вариант 46

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м³ — печь № 3, 12 м³ — печь № 2, 8 м³ — печь № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

$V = 3{,}5 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}2 = 21{,}56$ м³.
Ответ: 21,56.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $48 : 2 = 24$ см и 32 см.
$R = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ см.
Ответ: 40.

Задание 4

После скидки остаётся 88% цены. Получаем $31000 \cdot \dfrac{88}{100} = 27280$ руб.
Ответ: 27280.

Задание 5

Объём парной равен $21{,}56$ м³. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $31000 + 950 = 31950$ руб.
Печь № 3: $26000 + 950 + 5250 = 32200$ руб.
Наименьшая сумма — 31950 руб.
Ответ: 31950.

Задание 6

$(-13)^2 = 169$, $6^2 = 36$. Поэтому значение выражения равно $169 - 36 = 133$.
Ответ: 133.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{150}{7}$ приблизительно равно $21{,}429$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $3 + 2\sqrt{15} + 5 - 2\sqrt{15} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 11)(x + 9) = 0$. Корни: -11 и -9.
Требуемый корень равен -11.
Ответ: -11.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 3 = 997$. Вероятность равна $\dfrac{997}{1000} = 0{,}997$.

Ответ: $0{,}997$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 576}{12^2} = 8$ кг.

Ответ: 8.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -4$, второе — $x \le 7$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-4;7]$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 18-го ряда число мест увеличивается 17 раз: $21 + 17 \cdot 4 = 89$.
Ответ: 89.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$, поэтому каждый равен 44°.
Ответ: 44.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 5 : 2 = 2{,}5$.
Ответ: $2{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 16 \cdot 9 = 144$.
Ответ: 144.

Задание 18

Основания равны 2 и 8, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{2+8}{2} \cdot 2 = 10$.

Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-16}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-16 = (x-4)(x+4)$.
Критические точки: -4, 2, 4. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -4 и 4 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-4]\cup(2;4]$.

Задание 21

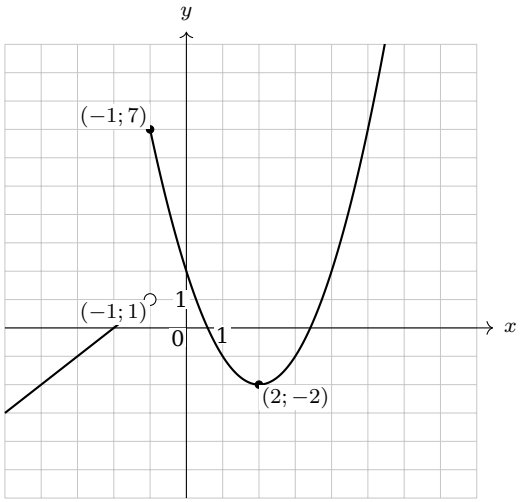
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 8 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 12 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+12$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+12)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+12}=\dfrac{1}{8}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+12)=8(2x+12)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=12$ и $x=-8$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{8}$, поэтому время совместной работы равно 8 ч.
Ответ: 12 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2-2, & x\geq -1,\\ x+2, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;-2)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;7)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+2$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;1)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 7$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>7$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 7 включена, поскольку точка $(-1;7)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $1\leq m\leq 7$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=3$, $CK=12$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=3$. Сторона $BC=BK+CK=15$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(3+15)=36$.
Ответ: 36.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 4$, $BC = 7$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 7$ и $BH = AC = 4$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 4|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-4)^2 + 7^2$.

После раскрытия скобок получаем $8R = 65$. Поэтому $R = \dfrac{65}{8}$.

Ответ: $\dfrac{65}{8}$.

Решения. Вариант 47

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 9.
Ответ: 9.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 2, 3, 5, 7.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{18+12+20+22}{4}=18$ ГБ.
Ответ: 18.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 100 минут и 2 ГБ.
Плата: $500+100\cdot 2+2\cdot 70=840$ руб.
Ответ: 840.

Задание 5

За месяц № 4 использовано 300 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $500+0\cdot 2+0\cdot 70=500$ руб.
«Расширенный»: $725+0\cdot 2+0\cdot 50=725$ руб.
Наименьшая плата — 500 руб.
Ответ: 500.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{20}$.
Умножаем на 5 и получаем $2{,}75$.
Ответ: $2{,}75$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{130}$ приблизительно равно $11{,}402$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$14+2=16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = \frac{5}{4}$.
$x = 16{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $5 \neq 0$.
Ответ: $16{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $71 + 10 + 19 = 100$. Благоприятных исходов 10, поэтому вероятность равна $\frac{10}{100} = 0{,}1$.
Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{2}{x}$.
Ответ: 321.

Задание 12

Подставляем $F = 14$: $C = \frac{5}{9}(14 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (-18) = -10$.
Ответ: -10.

Задание 13

$169 = 13^2$. Требуются числа, модуль которых больше 13.
Множество решений: $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 6 \cdot 3^4 = 486$.
Ответ: 486.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$. Длина положительна, поэтому $BC = 34$.
Ответ: 34.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $58 : 2 = 29$. Вторая сторона: $29 - 14 = 15$.
Площадь равна $14 \cdot 15 = 210$.
Ответ: 210.

Задание 18

Основание равно 5, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 5 \cdot 3 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 36x - 144 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 36(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+4)(x^2-36) = (x+4)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -4;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -4;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 11 км/ч, второго 12 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками $63{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $11(t - \frac{1}{2}) + 12t = \frac{127}{2}$. Отсюда $23t = 69$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $12 \cdot 3 = 36$ км. Время движения первого $\frac{5}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 36 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-4x+1)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

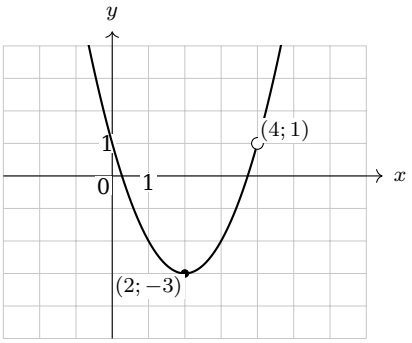
Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$.

Строим параболу с вершиной $(2; -3)$ и выколотой точкой $(4; 1)$.

При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 5$, $AC = 15$, $NC = 13$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 13$. По подобию $\dfrac{x}{x+13} = \dfrac{5}{15}$.

Отсюда $15x = 5(x+13)$, то есть $10x = 65$. Получаем $BN = \dfrac{13}{2}$.

Ответ: $\dfrac{13}{2}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.

На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 39$, $BC = 30$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{150}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 39 - \dfrac{150}{13} = \dfrac{357}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 30 \cdot \dfrac{\frac{357}{13}}{39} = \dfrac{3570}{169}$.

Ответ: $\dfrac{3570}{169}$.

Решения. Вариант 48

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А5 — размеры № 3, А3 — размеры № 2, А4 — размеры № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $2 \cdot 2^4 = 32$ листов.
Ответ: 32.

Задание 3

Размеры листа равны 21 см и $29{,}7$ см.
Площадь $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ см^2.
Ответ: 623,7.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 70 \cdot 500}{1000} = 1{,}0878$ кг.
После округления получаем $1{,}1$ кг.
Ответ: 1,1.

Задание 5

Всего нужно $795 \cdot 4 = 3180$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{3180}{500} \right\rceil = 7$.
Стоимость: $7 \cdot 380 = 2660$ руб.
Ответ: 2660.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}6$.
$9{,}6 : 0{,}5 = 19{,}2$.
Ответ: 19,2.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{338}$ приблизительно равно $-18{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{2 \cdot 2 - 1} = 2^3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

$4x = -33 - (5) = -38$, поэтому $x = -9{,}5$.
Ответ: $-9{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 36$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{40} = 0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = -x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = 2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = x$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 72{,}5}{4+25} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

Получаем $-3x \geq -30$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 10]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{11} = -13 + (11-1) \cdot (-2) = -33$.
Ответ: -33.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 36° - 70° = 74°$.
Ответ: 74.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 142° : 2 = 71°$.
Ответ: 71.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{15+9}{2} \cdot 7 = 84$.
Ответ: 84.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 3, поэтому площадь равна $8 \cdot 3 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{15}{x-36}+\dfrac{15}{x+36}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 36$ и $x\neq -36$.
Умножим уравнение на $(x-36)(x+36)$: $15(x+36)+15(x-36)=x^2-1296$.
Получим $x^2-30x-1296=0$, или $(x-15)^2=1521=39^2$.
Поэтому $x=15-39=-24$ или $x=15+39=54$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-24;\ 54$.

Задание 21

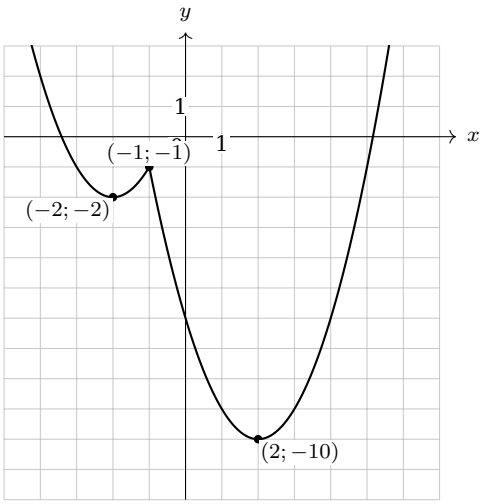
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{20}{100}x+\dfrac{70}{100}(60-x)=\dfrac{50}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $20x+4200-70x=3000$. Поэтому $50x=1200$ и $x=24$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 24 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=x^2-2-4|x+1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t=x+1$. При $t<0$ получаем $y=t^2+2t-1$, при $t\geq 0$ — $y=t^2-6t-1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1;-2)$ и $(3;-10)$. В точке $t=0$ обе части дают $y=-1$.
При $m<-10$ пересечений нет; при $m=-10$ одно; при $-10<m<-2$ два; при $m=-2$ три.
При $-2<m<-1$ пересечений четыре. При $m=-1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m>-1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m=-2$ или $m=-1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 39, а основание равно 30. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{39 \cdot 39 \cdot 30}{4 \cdot 540} = \dfrac{169}{8}$.

Ответ: $\dfrac{169}{8}$.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.

Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.

Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 24$, $CD = 51$, основание $BC = 3$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 51 - 3 = 48$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 24$, $AP = BC = 3$, $PD = AD - BC = 45$.

В треугольнике CPD выполняется $24^2 + 45^2 = 51^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 24.

Площадь $S = \dfrac{48 + 3}{2} \cdot 24 = 612$.

Ответ: 612.

Решения. Вариант 49

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 215, 225, 235 мм. Наименьшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 205 \cdot \dfrac{65}{100} = 133{,}25$ мм.
Ответ: 133,25.

Задание 3

Диаметр диска: $13 \cdot 25{,}4 = 330{,}2$ мм.
Высота боковины: $215 \cdot \dfrac{60}{100} = 129$ мм.
$D = 330{,}2 + 2 \cdot 129 = 588{,}2$ мм.
Ответ: 588,2.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$215 \cdot \dfrac{55}{100} - 225 \cdot \dfrac{50}{100} = 5{,}75$ мм.
Ответ: 5,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $14 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 215 \cdot \dfrac{55}{100} = 592{,}1$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{592{,}1 - 588{,}2}{588{,}2} \cdot 100\% \approx 0{,}7\%$.
Ответ: 0,7.

Задание 6

$(-14)^2 = 196$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $196 - 16 = 180$.
Ответ: 180.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{59}{7}$ приблизительно равно $8{,}429$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{150} + 10 - 2\sqrt{150} = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+3)(x+2)=0$. Корни: -3 и -2.
Требуемый корень равен -2.
Ответ: -2.

Задание 10

Исправных ламп $200-8=192$. Вероятность равна $\dfrac{192}{200}=0{,}96$.
Ответ: $0{,}96$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y=x^2-1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1+R_2)=R_1R_2$ получаем $R_2=\dfrac{RR_1}{R_1-R}$.
$R_2=\dfrac{18\cdot 30}{30-18}=45$ Ом.
Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -10 и -7. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-10;-7]$.
Ответ: 3.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $22+20\cdot 4=102$.
Ответ: 102.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-112^\circ=68^\circ$, поэтому каждый равен 34°.
Ответ: 34.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT=\sqrt{OP^2-OT^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S=\dfrac{24\cdot 16}{2}=192$.
Ответ: 192.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 65x^2 + 784 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 65t + 784 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 49) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 49$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 49$ — $x = \pm 7$.
Ответ: $-7;\ -4;\ 4;\ 7$.

Задание 21

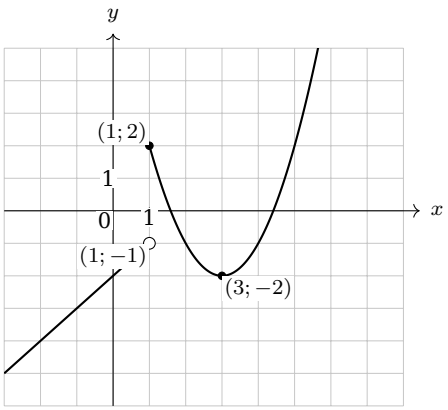
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 252 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{252}{x} - \dfrac{252}{x+3} = 2$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $756 = 2x(x+3)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 18)(x + 21) = 0$.
Корень $x = -21$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 18 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-3)^2-2, & x\geq 1,\\ x-2, & x<1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3;-2)$, оставленная при $x\geq 1$. Точка $(1;2)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x-2$ при $x<1$. Его конечная точка $(1;-1)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<-1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1\leq m\leq 2$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>2$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 2 включена, поскольку точка $(1;2)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $-1\leq m\leq 2$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 32 и 32. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $32+32=64$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=64\cdot 32$ и $v^2=64\cdot 32$.
Поэтому $u=32\sqrt{2}$, $v=32\sqrt{2}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=64+64\sqrt{2}$.
Ответ: $64+64\sqrt{2}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 7$, $MD = 4$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 16$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{16}{7} = \dfrac{16}{7}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 7 - \dfrac{16}{7} = \dfrac{33}{7}$.
Ответ: $\dfrac{33}{7}$.

Решения. Вариант 50

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

сарай — 4; теплица — 1; баня — 6; яблони — 5.
Ответ: 4165.

Задание 2

Дорожки занимают $10 + 6 + 12 - 2 = 26$ м^2: два пересечения вычитаем, чтобы не считать их дважды.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 26 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \dfrac{26}{12} \right\rceil = 3$.
Ответ: 3.

Задание 3

Баня занимает $2 \cdot 4 = 8$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $8 \cdot 4 = 32$ м^2.
Ответ: 32.

Задание 4

Горизонтальные проекции построек перекрываются; вертикальный промежуток составляет 2 клетки.
Расстояние равно $2 \cdot 2 = 4$ м.
Ответ: 4.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(27500 + 24868) - (22000 + 12000) = 18368$ руб.
Газ за час: $1{,}2 \cdot 6 = 7{,}2$ руб.; электричество: $8 \cdot 5 = 40$ руб.
Экономия за час равна $32{,}8$ руб. Срок: $18368 : 32{,}8 = 560$ ч.
Ответ: 560.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{17}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{8}$.
Умножаем на 2 и получаем $3{,}25$.
Ответ: 3,25.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{252}$ приблизительно равно $15{,}875$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$17 + 2 = 19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 14$. Из равенства получаем $x - (14) = 7$.
$x = 21$. Это значение допустимо, так как числитель $14 \neq 0$.
Ответ: 21.

Задание 10

Всего шаров $30 + 15 + 5 = 50$. Благоприятных исходов 15, поэтому вероятность равна $\dfrac{15}{50} = 0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = x + 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 144}{6^2} = 8$ кг.
Ответ: 8.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -6$, второе — $x \leq 0$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-6; 0]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 9 \cdot 2^6 = 576$.
Ответ: 576.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 10^2 = 676$. Длина положительна, поэтому $BC = 26$.
Ответ: 26.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 15 \cdot 7 = 105$.
Ответ: 105.

Задание 18

Основание занимает 3 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$.

Ответ: 6.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-3-x$. Подставим во второе: $x^2+(-3-x)^2=9$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+3x=0$.
Разложим на множители: $(x+3)(x)=0$. Следовательно, $x=-3$ или $x=0$.
При $x=-3$ первое уравнение даёт $y=0$; при $x=0$ получаем $y=-3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -3, сумма их квадратов равна 9.
Ответ: $(x;y)=(-3;0)$ или $(x;y)=(0;-3)$.

Задание 21

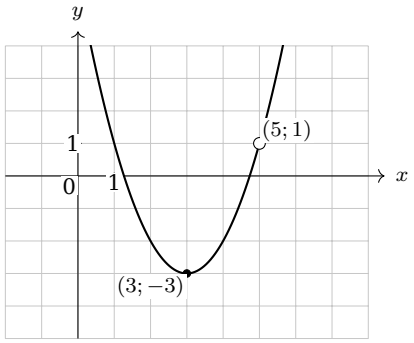
Моторная лодка прошла 51 км по течению реки и 14 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{51}{x+5}+\dfrac{14}{x-5}=5$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $5x^2-65x+60=0$. Его корни: $x=12$ и $x=1$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=12$ времена равны 3 ч и 2 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-5)(x^2-6x+6)}{x-5}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 5$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 6 = (x-3)^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(3;-3)$ и выколотой точкой $(5;1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 15$, $BF = 36$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{225 + 1296} = 39$.
Ответ: 39.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 12$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 6$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 12/\cos 45^\circ = 12\sqrt{2}$.

Ответ: $12\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 51

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; коридор — 2; санузел — 1; спальня — 4.
Ответ: 3214.

Задание 2

Пол гостиной занимает 156 клеток, его площадь $156 \cdot 0{,}4^2 = 24{,}96$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$ м^2. Требуется $24{,}96 : 0{,}16 = 156$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{156}{16} \right\rceil = 10$ целых упаковок.
Ответ: 10.

Задание 3

На плане помещение занимает 30 клеток.
Его площадь $30 \cdot 0{,}4^2 = 4{,}8$ м^2.
Ответ: 4,8.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $390 + 25 \cdot 55 = 1765$ руб.
Тариф «Б»: $540 + 15 \cdot 30 = 990$ руб.
Безлимитный тариф стоит 810 руб. Наименьшая плата — 810 руб.
Ответ: 810.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}8$.
$9{,}8 : 0{,}5 = 19{,}6$.
Ответ: 19,6.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{35}$ приблизительно равно $-5{,}916$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{3\cdot 2-4} = 5^2 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

$5x = 40 - (20) = 20$, поэтому $x = 4$.
Ответ: 4.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 39$; их 13. Вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = 2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = x - 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 23$: $C = \dfrac{5}{9}(23 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-9) = -5$.

Ответ: -5.

Задание 13

$49 = 7^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 7.
Множество решений: $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{19} = 23 + (19 - 1) \cdot (-1) = 5$.
Ответ: 5.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 37° - 60° = 83°$.
Ответ: 83.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 60 : 2 = 30$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $48 : 2 = 24$. Вторая сторона: $24 - 10 = 14$.
Площадь равна $10 \cdot 14 = 140$.
Ответ: 140.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-25}{x-2}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 2$. Разложим числитель: $x^2-25=(x-5)(x+5)$.
Критические точки: -5, 2, 5. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -5 и 5 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-5]\cup(2;5]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $6{,}4$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 24 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+24$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+24)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+24}=\dfrac{5}{32}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+24)=\dfrac{32}{5}(2x+24)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=8$ и $x=-\dfrac{96}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{5}{32}$, поэтому время совместной работы равно $6{,}4$ ч.
Ответ: 8 ч.

Задание 22

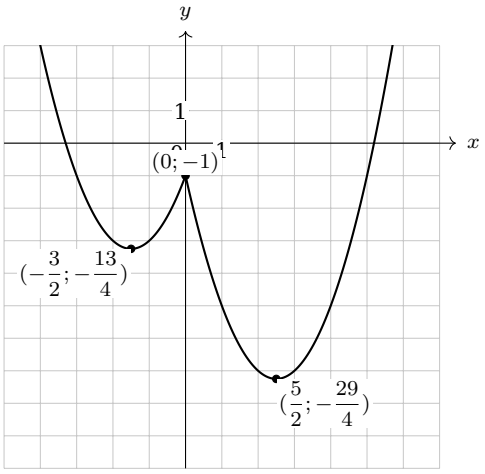
Постройте график функции $y = x^2 - x - 1 - 4|x|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{3}{2}; -\frac{13}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.

При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{13}{4}$ два; при $m = -\frac{13}{4}$ три.

При $-\frac{13}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{13}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 4$, $CK = 13$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 4$. Сторона $BC = BK + CK = 17$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(4 + 17) = 42$.

Ответ: 42.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180°$.

Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90°$.

Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90°$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 5$, $BC = 9$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 9$ и $BH = AC = 5$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 5|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-5)^2 + 9^2$.

После раскрытия скобок получаем $10R = 106$. Поэтому $R = \dfrac{53}{5}$.

Ответ: $\dfrac{53}{5}$.

Решения. Вариант 52

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Иваново — 2; Журавушка — 1; Васильково — 4.
Ответ: 214.

Задание 2

Путь занимает 12 клеток.
Длина пути равна $12 \cdot 1 = 12$ км.
Ответ: 12.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 5 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{20} \cdot 60 + \frac{13}{15} \cdot 60 = 85$.
Ответ: 85.

Задание 5

Васильково: $2 \cdot 57 + 1 \cdot 665 + 2 \cdot 843 = 2465$ руб.
Иваново: $2 \cdot 64 + 1 \cdot 635 + 2 \cdot 828 = 2419$ руб.
Камышино: $2 \cdot 54 + 1 \cdot 620 + 2 \cdot 852 = 2432$ руб.
Журавушка: $2 \cdot 49 + 1 \cdot 644 + 2 \cdot 873 = 2488$ руб.
Наименьшая стоимость — 2419 руб.
Ответ: 2419.

Задание 6

$(-8)^2 = 64$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $64 - 4 = 60$.
Ответ: 60.

Задание 7

Значение числа $\frac{85}{7}$ приблизительно равно 12,143. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $3 + 2\sqrt{39} + 13 - 2\sqrt{39} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Разложение на множители: $(x)(x - 6) = 0$. Корни: 0 и 6.
Требуемый корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 19 = 181$. Вероятность равна $\dfrac{181}{200} = 0{,}905$.
Ответ: $0{,}905$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 100}{5+20} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 13

Получаем $-3x > 3$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; -1)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 16-го ряда число мест увеличивается 15 раз: $19 + 15 \cdot 3 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$, поэтому каждый равен 42°.
Ответ: 42.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 86^\circ : 2 = 43^\circ$.
Ответ: 43.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{16+7}{2} \cdot 5 = 57{,}5$.
Ответ: $57{,}5$.

Задание 18

Основание равно 4, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 4 \cdot 3 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 49x - 245 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+5) - 49(x+5) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+5)(x^2-49) = (x+5)(x-7)(x+7) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-7;\ -5;\ 7$.
Ответ: $-7;\ -5;\ 7$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 12 км/ч, второго 15 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками 72 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $12(t - \dfrac{3}{4}) + 15t = 72$. Отсюда $27t = 81$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $15 \cdot 3 = 45$ км. Время движения первого $\dfrac{9}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 45 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-4)^2-2, & x\geq 1,\\ x-1, & x<1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(4;-2)$, оставленная при $x\geq 1$. Точка $(1;7)$ входит в график.

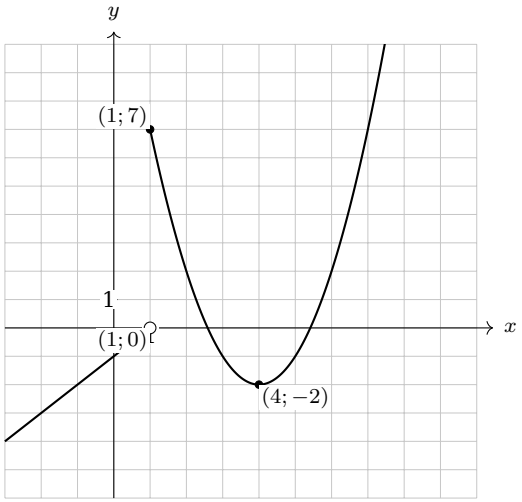
Вторая часть — луч прямой $y=x-1$ при $x<1$. Его конечная точка $(1;0)$ выколота.

При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.

При $-2<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.

При $0\leq m\leq 7$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.

При $m>7$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 7 включена, поскольку точка $(1;7)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $0\leq m\leq 7$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=6$, $AC=24$, $NC=14$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+14$. По подобию $\dfrac{x}{x+14}=\dfrac{6}{24}$.

Отсюда $24x=6(x+14)$, то есть $18x=84$. Получаем $BN=\dfrac{14}{3}$.

Ответ: $\dfrac{14}{3}$.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 51$, $BC = 48$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.
В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{384}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 51 - \dfrac{384}{17} = \dfrac{483}{17}$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны.
Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 48 \cdot \dfrac{\frac{483}{17}}{51} = \dfrac{7728}{289}$.
Ответ: $\dfrac{7728}{289}$.

Решения. Вариант 53

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Озёрное — 1; Берёзовка — 2; Луговое — 4.
Ответ: 124.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $18 + 12 + 16 = 46$ км.
Ответ: 46.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 30 и 16 км.
Её длина $\sqrt{30^2 + 16^2} = 34$ км.
Ответ: 34.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 18 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 20 км.
Время: $\frac{18}{80} \cdot 60 + \frac{20}{40} \cdot 60 = 43{,}5$ мин.
Ответ: 43,5.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\frac{46 \cdot 6{,}5}{100} \cdot 67 = 200{,}33$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\frac{34 \cdot 8}{100} \cdot 67 = 182{,}24$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\frac{18 \cdot 6{,}5 + 20 \cdot 8}{100} \cdot 67 = 185{,}59$ руб.
Наименьшая стоимость — 182,24 руб.
Ответ: 182,24.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{23}{4} - \frac{7}{4} = 4$.
Умножаем на 5 и получаем 20.
Ответ: 20.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{366}$ приблизительно равно 19,131. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$24 + 1 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -4$. Из равенства получаем $x - (-4) = -\dfrac{25}{8}$.
$x = -7{,}125$. Это значение допустимо, так как числитель $-25 \neq 0$.
Ответ: $-7{,}125$.

Задание 10

Всего шаров $26 + 45 + 29 = 100$. Благоприятных исходов 45, поэтому вероятность равна $\dfrac{45}{100} = 0{,}45$.
Ответ: $0{,}45$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = x + 1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{8{,}4 \cdot 14}{14 - 8{,}4} = 21$ Ом.
Ответ: 21.

Задание 13

Нули множителей: -3 и 6. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-3; 6)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 3 \cdot 2^6 = 192$.
Ответ: 192.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{12 \cdot 18}{2} = 108$.

Ответ: 108.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 7 и 5, поэтому площадь равна $7 \cdot 5 = 35$.

Ответ: 35.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.

Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{24}{x-45} + \dfrac{24}{x+45} = 1$.

Область допустимых значений: $x \neq 45$ и $x \neq -45$.
Умножим уравнение на $(x-45)(x+45)$: $24(x+45) + 24(x-45) = x^2 - 2025$.
Получим $x^2 - 48x - 2025 = 0$, или $(x-24)^2 = 2601 = 51^2$.
Поэтому $x = 24 - 51 = -27$ или $x = 24 + 51 = 75$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.

Ответ: $-27;\ 75$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 35% меди?

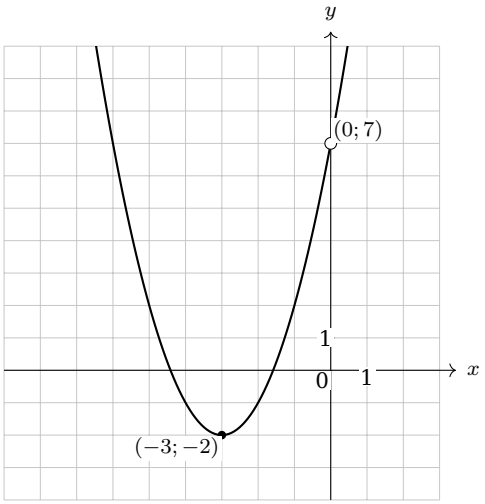
Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70 - x$ кг, причём $0 < x < 70$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{25}{100}x + \dfrac{75}{100}(70 - x) = \dfrac{35}{100} \cdot 70$.
Умножим на 100: $25x + 5250 - 75x = 2450$. Поэтому $50x = 2800$ и $x = 56$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.

Ответ: 56 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+6x+7)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(-3;-2)$ и выколотой точкой $(0;7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -6 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 51, а основание равно 48. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 48 \cdot 45 = 1080$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{51 \cdot 51 \cdot 48}{4 \cdot 1080} = \dfrac{289}{10}$.
Ответ: $\dfrac{289}{10}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 45$, $CD = 51$, основание $BC = 13{,}5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 51 - \dfrac{27}{2} = \dfrac{75}{2}$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 45$, $AP = BC = \dfrac{27}{2}$, $PD = AD - BC = 24$.

В треугольнике CPD выполняется $45^2 + 24^2 = 51^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 45.

Площадь $S = \dfrac{\dfrac{75}{2} + \dfrac{27}{2}}{2} \cdot 45 = \dfrac{2295}{2}$.

Ответ: $\dfrac{2295}{2}$.

Решения. Вариант 54

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

$V = 3{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}4 = 20{,}736$ м^3.
Ответ: 20,736.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $54 : 2 = 27$ см и 36 см.
$R = \sqrt{27^2 + 36^2} = 45$ см.
Ответ: 45.

Задание 4

После скидки остаётся 85% цены. Получаем $31600 \cdot \dfrac{85}{100} = 26860$ руб.
Ответ: 26860.

Задание 5

Объём парной равен $20{,}736$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $31600 + 1000 = 32600$ руб.
Печь № 3: $26400 + 1000 + 5400 = 32800$ руб.
Наименьшая сумма — 32600 руб.
Ответ: 32600.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}4$.
$11{,}4 : 0{,}5 = 22{,}8$.
Ответ: 22,8.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{93}$ приблизительно равно $-9{,}644$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{3 \cdot 2 - 3} = 4^3 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$8x = 18 - (2) = 16$, поэтому $x = 2$.
Ответ: 2.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 39$; их 13. Вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = x + 2$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = 3x + 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 283{,}5}{9^2} = 7$ кг.

Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -6$, второе — $x \le 6$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-6; 6]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{25} = 10 + (25-1) \cdot (2) = 58$.
Ответ: 58.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 64° - 40° = 76°$.
Ответ: 76.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 25 \cdot 10 = 250$.
Ответ: 250.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 3 и 4. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 26t + 25 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 25) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 25$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 25$ — $x = \pm 5$.
Ответ: $-5;\ -1;\ 1;\ 5$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 448 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{448}{x} - \dfrac{448}{x+4} = 2$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $1792 = 2x(x+4)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 28)(x + 32) = 0$.
Корень $x = -32$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 28 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 28 км/ч.

Задание 22

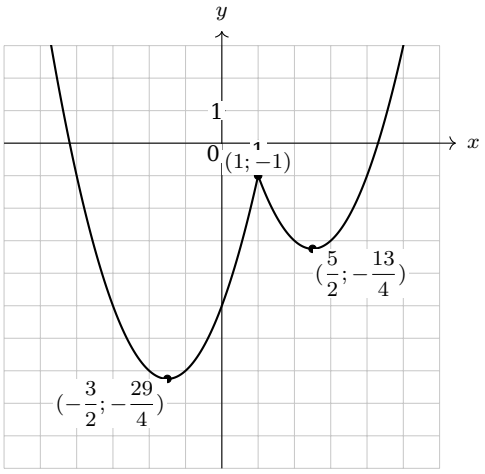
Постройте график функции $y = x^2 - x - 1 - 4|x - 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t - 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{13}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.

При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{13}{4}$ два; при $m = -\frac{13}{4}$ три.

При $-\frac{13}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{13}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 25 и 16. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $25 + 16 = 41$. Обозначим катеты u и v.

Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 41 \cdot 25$ и $v^2 = 41 \cdot 16$.

Поэтому $u = 5\sqrt{41}$, $v = 4\sqrt{41}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 41 + 9\sqrt{41}$.

Ответ: $41 + 9\sqrt{41}$.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 5$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{8} = \dfrac{25}{8}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - \dfrac{25}{8} = \dfrac{39}{8}$.
Ответ: $\dfrac{39}{8}$.

Решения. Вариант 55

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 6.
Ответ: 6.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{4+8+6+10}{4} = 7$ ГБ.
Ответ: 7.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 0 ГБ.
Плата: $510 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 510$ руб.
Ответ: 510.

Задание 5

За месяц № 10 использовано 250 минут и 10 ГБ.
«Основной»: $510 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 510$ руб.
«Расширенный»: $740 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 740$ руб.
Наименьшая плата — 510 руб.
Ответ: 510.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $6^2 = 36$. Поэтому значение выражения равно $25 - 36 = -11$.
Ответ: -11.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{186}{11}$ приблизительно равно $16{,}909$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $11 + 2\sqrt{110} + 10 - 2\sqrt{110} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+5)(x-2) = 0$. Корни: -5 и 2.
Требуемый корень равен 2.
Ответ: 2.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 9 = 491$. Вероятность равна $\dfrac{491}{500} = 0{,}982$.

Ответ: $0{,}982$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 113$: $C = \dfrac{5}{9}(113 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (81) = 45$.

Ответ: 45.

Задание 13

$100 = 10^2$. Требуются числа, модуль которых больше 10.
Множество решений: $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

От первого до 15-го ряда число мест увеличивается 14 раз: $18 + 14 \cdot 4 = 74$.
Ответ: 74.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$, поэтому каждый равен 32°.
Ответ: 32.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $28 : 2 = 14$. Вторая сторона: $14 - 7 = 7$.
Площадь равна $7 \cdot 7 = 49$.
Ответ: 49.

Задание 18

Основание занимает 7 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

Ответ: 21.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-1-x$. Подставим во второе: $x^2+(-1-x)^2=5$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+x-2=0$.
Разложим на множители: $(x+2)(x-1)=0$. Следовательно, $x=-2$ или $x=1$.
При $x=-2$ первое уравнение даёт $y=1$; при $x=1$ получаем $y=-2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -1, сумма их квадратов равна 5.
Ответ: $(x;y)=(-2;1)$ или $(x;y)=(1;-2)$.

Задание 21

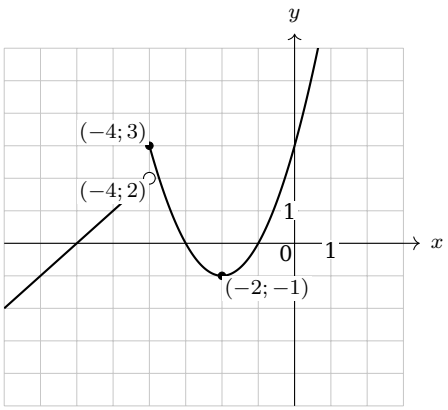
Моторная лодка прошла 48 км по течению реки и 36 км против течения, затратив на весь путь 6 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>2$. Скорости по течению и против течения равны $x+2$ и $x-2$.
Уравнение времени: $\dfrac{48}{x+2}+\dfrac{36}{x-2}=6$.
После умножения на $(x+2)(x-2)$ и приведения получаем $6x^2-84x=0$. Его корни: $x=14$ и $x=0$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>2$. Для $x=14$ времена равны 3 ч и 3 ч, их сумма 6 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x+2)^2 - 1, & x \geq -4, \\ x + 6, & x < -4. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2; -1)$, оставленная при $x \geq -4$. Точка $(-4; 3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 6$ при $x < -4$. Его конечная точка $(-4; 2)$ выколота.
При $m < -1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1 < m < 2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $2 \leq m \leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(-4; 3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -1$ или $2 \leq m \leq 3$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 24$, $BF = 45$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{576 + 2025} = 51$.
Ответ: 51.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 13$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{13}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 13/\cos 60^\circ = 26$.

Ответ: 26.

Решения. Вариант 56

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А5 — размеры № 1, А6 — размеры № 2, А4 — размеры № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $3 \cdot 2^4 = 48$ листов.
Ответ: 48.

Задание 3

Размеры листа равны $14{,}8$ см и 21 см.
Площадь $14{,}8 \cdot 21 = 310{,}8$ см^2.
Ответ: 310,8.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}297 \cdot 0{,}42 = 0{,}12474$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}12474 \cdot 80 \cdot 250}{1000} = 2{,}4948$ кг.
После округления получаем $2{,}5$ кг.
Ответ: 2,5.

Задание 5

Всего нужно $830 \cdot 2 = 1660$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1660}{250} \right\rceil = 7$.
Стоимость: $7 \cdot 400 = 2800$ руб.
Ответ: 2800.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{19}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{2}$.
Умножаем на 2 и получаем 9.
Ответ: 9.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{44}$ приблизительно равно $6{,}633$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$12 + 3 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 1$. Из равенства получаем $x-(1)=\frac{1}{4}$.
$x = 1{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $2 \neq 0$.
Ответ: $1{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $26+6+8=40$. Благоприятных исходов 6, поэтому вероятность равна $\frac{6}{40}=0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y=-2x-1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x=1$. Ему соответствует формула 1, $y=\frac{-1}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y=x^2+2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h=\frac{2S}{a+b}=\frac{2\cdot 264}{4+29}=16$.
Ответ: 16.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -30$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty;6]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n=b_1q^{n-1}$, поэтому $b_5=5\cdot 2^4=80$.
Ответ: 80.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2+AC^2=48^2+20^2=2704$. Длина положительна, поэтому $BC=52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB=78^\circ:2=39^\circ$.
Ответ: 39.

Задание 17

$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot BH=\frac{25+6}{2}\cdot 9=139{,}5$.
Ответ: $139{,}5$.

Задание 18

Основания равны 3 и 5, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{3+5}{2} \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.

Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-36}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-36 = (x-6)(x+6)$.
Критические точки: -6, 2, 6. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -6 и 6 включаем, точку 2 исключаем.

Ответ: $(-\infty;-6] \cup (2;6]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 6 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 5 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

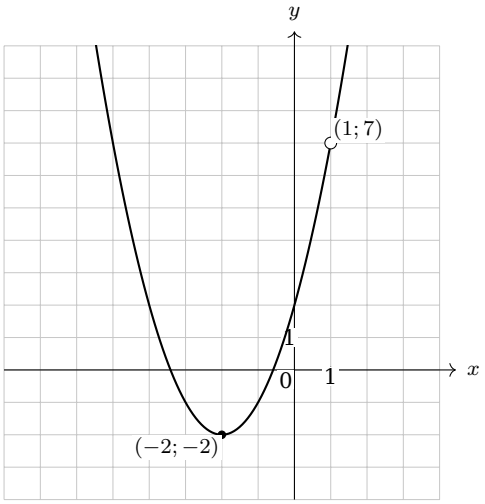
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+5$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+5)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{6}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+5) = 6(2x+5)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 10$ и $x = -3$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{6}$, поэтому время совместной работы равно 6 ч.

Ответ: 10 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2+4x+2)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(-2;-2)$ и выколотой точкой $(1;7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -5 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 14$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 19$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(5 + 19) = 48$.
Ответ: 48.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, $BC = 5$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 5$ и $BH = AC = 6$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 6|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-6)^2 + 5^2$.

После раскрытия скобок получаем $12R = 61$. Поэтому $R = \dfrac{61}{12}$.

Ответ: $\dfrac{61}{12}$.

Решения. Вариант 57

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 225, 235, 245 мм. Наибольшая из них — 245 мм.
Ответ: 245.

Задание 2

$H = 215 \cdot \dfrac{65}{100} = 139{,}75$ мм.
Ответ: 139,75.

Задание 3

Диаметр диска: $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины: $225 \cdot \dfrac{60}{100} = 135$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 135 = 625{,}6$ мм.
Ответ: 625,6.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$225 \cdot \dfrac{55}{100} - 235 \cdot \dfrac{50}{100} = 6{,}25$ мм.
Ответ: 6,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 225 \cdot \dfrac{55}{100} = 628{,}5$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{628{,}5 - 625{,}6}{625{,}6} \cdot 100\% \approx 0{,}5\%$.
Ответ: 0,5.

Задание 6

Сумма в скобках равна $4{,}5$.
$4{,}5 : 0{,}5 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{193}$ приблизительно равно $-13{,}892$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{3 \cdot 2 - 4} = 5^2 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

$4x = -32 - (-16) = -16$, поэтому $x = -4$.
Ответ: -4.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 40$; их 5. Вероятность равна $\dfrac{5}{40} = 0{,}125$.
Ответ: $0{,}125$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = -3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = 2x$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{22{,}8 \cdot 38}{38 - 22{,}8} = 57$ Ом.
Ответ: 57.

Задание 13

Нули множителей: -8 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-8; 1]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_9 = 3 + (9-1) \cdot (1) = 11$.
Ответ: 11.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 38° - 56° = 86°$.
Ответ: 86.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 18

Основание равно 3, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 3 \cdot 6 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 6x^2 - 64x - 384 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+6) - 64(x+6) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+6)(x^2-64) = (x+6)(x-8)(x+8) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-8;\ -6;\ 8$.
Ответ: $-8;\ -6;\ 8$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 13 км/ч, второго 18 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $89{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

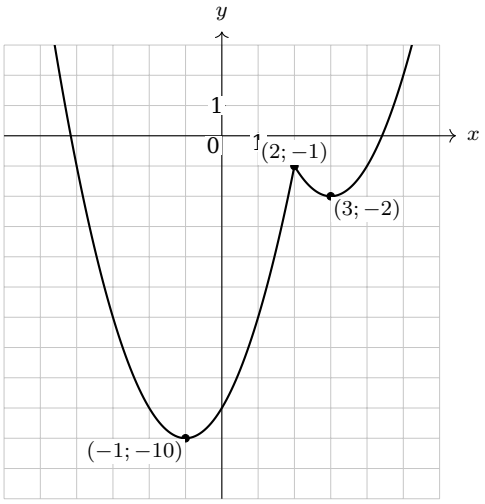
Сумма путей: $13(t - \frac{1}{4}) + 18t = \frac{359}{4}$. Отсюда $31t = 93$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $18 \cdot 3 = 54$ км. Время движения первого $\frac{11}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 54 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 1 - 4|x - 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 6t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t - 1$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-3; -10)$ и $(1; -2)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.
При $m < -10$ пересечений нет; при $m = -10$ одно; при $-10 < m < -2$ два; при $m = -2$ три.
При $-2 < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -2$ или $m = -1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 7$, $AC = 14$, $NC = 15$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 15$. По подобию $\dfrac{x}{x + 15} = \dfrac{7}{14}$.
Отсюда $14x = 7(x + 15)$, то есть $7x = 105$. Получаем $BN = 15$.
Ответ: 15.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 20$, $BC = 24$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{72}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 20 - \dfrac{72}{5} = \dfrac{28}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 24 \cdot \dfrac{\frac{28}{5}}{20} = \dfrac{168}{25}$.

Ответ: $\dfrac{168}{25}$.

Решения. Вариант 58

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

баня — 6; жилой дом — 3; яблони — 5; теплица — 1.
Ответ: 6351.

Задание 2

По условию площадь площадки равна 64 м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 64 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{64}{4} \right\rceil = 16$.
Ответ: 16.

Задание 3

Дом занимает 17 клеток, баня — 8 клеток. Разность равна 9 клеткам.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $9 \cdot 4 = 36$ м^2.
Ответ: 36.

Задание 4

Вертикальные проекции построек перекрываются; горизонтальный промежуток составляет 9 клеток.
Расстояние равно $9 \cdot 2 = 18$ м.
Ответ: 18.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(29000 + 20860) - (24000 + 10500) = 15360$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 6 = 9$ руб.; электричество: $6 \cdot 5{,}5 = 33$ руб.
Экономия за час равна 24 руб. Срок: $15360 : 24 = 640$ ч.
Ответ: 640.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $25 - 16 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 7

Значение числа $\frac{355}{17}$ приблизительно равно $20{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $6 + 2\sqrt{90} + 15 - 2\sqrt{90} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 9)(x + 6) = 0$. Корни: -9 и -6.
Требуемый корень равен -9.
Ответ: -9.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 3 = 997$. Вероятность равна $\dfrac{997}{1000} = 0{,}997$.

Ответ: $0{,}997$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 648}{12^2} = 9$ кг.

Ответ: 9.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -3$, второе — $x \le 2$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-3; 2]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 12-го ряда число мест увеличивается 11 раз: $20 + 11 \cdot 3 = 53$.
Ответ: 53.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$, поэтому каждый равен 47°.
Ответ: 47.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 13 : 2 = 6{,}5$.
Ответ: $6{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 7 \cdot 11 = 77$.
Ответ: 77.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 5 и 5, поэтому площадь равна $5 \cdot 5 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Утверждение 2 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{12}{x-16}+\frac{12}{x+16}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 16$ и $x \neq -16$.
Умножим уравнение на $(x-16)(x+16)$: $12(x+16)+12(x-16)=x^2-256$.
Получим $x^2-24x-256=0$, или $(x-12)^2=400=20^2$.
Поэтому $x = 12-20 = -8$ или $x = 12+20 = 32$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-8;\ 32$.

Задание 21

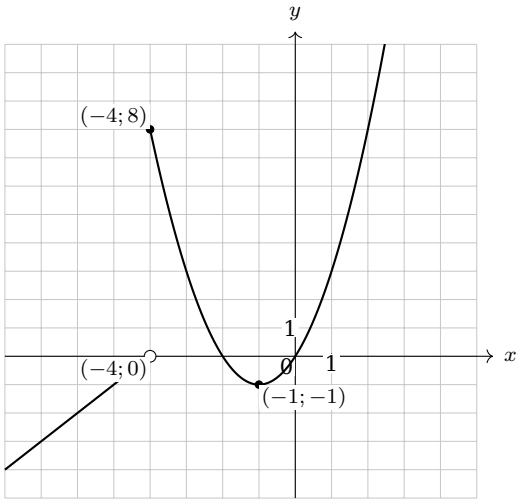
Имеются два сплава с содержанием меди 30% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70-x$ кг, причём $0<x<70$.
Количество меди сохраняется: $\frac{30}{100}x+\frac{65}{100}(70-x)=\frac{40}{100}\cdot 70$.
Умножим на 100: $30x+4550-65x=2800$. Поэтому $35x=1750$ и $x=50$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 50 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2-1, & x\geq -4,\\ x+4, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;-1)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;8)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+4$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;0)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 8$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>8$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 8 включена, поскольку точка $(-4;8)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $0\leq m\leq 8$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а основание равно 24. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h=\sqrt{20^2-12^2}=16$.
Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot 16=192$.
По формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$ получаем $R=\dfrac{20\cdot 20\cdot 24}{4\cdot 192}=\dfrac{25}{2}$.
Ответ: $\dfrac{25}{2}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 48$, $CD = 52$, основание $BC = 16$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 52 - 16 = 36$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 48$, $AP = BC = 16$, $PD = AD - BC = 20$.
В треугольнике CPD выполняется $48^2 + 20^2 = 52^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 48.
Площадь $S = \dfrac{36 + 16}{2} \cdot 48 = 1248$.
Ответ: 1248.

Решения. Вариант 59

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; спальня — 4; санузел — 1; гостиная — 6.
Ответ: 3416.

Задание 2

Пол гостиной занимает 156 клеток, его площадь $156 \cdot 0{,}5^2 = 39$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ м^2. Требуется $39 : 0{,}25 = 156$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{156}{6} \right\rceil = 26$ целых упаковок.
Ответ: 26.

Задание 3

На плане помещение занимает 99 клеток.
Его площадь $99 \cdot 0{,}5^2 = 24{,}75$ м^2.
Ответ: 24,75.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 156 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{156 - 30}{30} \cdot 100\% = 420\%$.
Ответ: 420.

Задание 5

Тариф «А»: $400 + 8 \cdot 60 = 880$ руб.
Тариф «Б»: $550 + 0 \cdot 35 = 550$ руб.
Безлимитный тариф стоит 825 руб. Наименьшая плата — 550 руб.
Ответ: 550.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{5}$.
Умножаем на 2 и получаем $2{,}8$.
Ответ: 2,8.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{108}$ приблизительно равно $10{,}392$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$24 + 1 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 10$. Из равенства получаем $x - (10) = -\dfrac{17}{2}$.
$x = 1{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-17 \neq 0$.
Ответ: $1{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $12 + 13 + 15 = 40$. Благоприятных исходов 13, поэтому вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.
Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{-2}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 86$: $C = \dfrac{5}{9}(86 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (54) = 30$.
Ответ: 30.

Задание 13

$121 = 11^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 11.
Множество решений: $(-\infty; -11] \cup [11; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 9 \cdot 2^3 = 72$.
Ответ: 72.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$. Длина положительна, поэтому $BC = 15$.
Ответ: 15.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 16 : 2 = 8$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52 : 2 = 26$. Вторая сторона: $26 - 10 = 16$.
Площадь равна $10 \cdot 16 = 160$.
Ответ: 160.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 40t + 144 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.
Ответ: $-6;\ -2;\ 2;\ 6$.

Задание 21

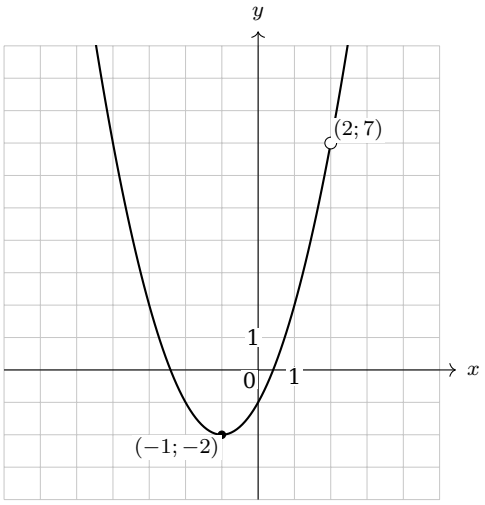
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 288 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{288}{x} - \dfrac{288}{x + 2} = 2$. Умножив на $x(x + 2)$, получаем $576 = 2x(x + 2)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 16)(x + 18) = 0$.
Корень $x = -18$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 16 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(-1; -2)$ и выколотой точкой $(2; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 72 и 32. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $72 + 32 = 104$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 104 \cdot 72$ и $v^2 = 104 \cdot 32$.
Поэтому $u = 24\sqrt{13}$, $v = 16\sqrt{13}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 104 + 40\sqrt{13}$.
Ответ: $104 + 40\sqrt{13}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 9$, $MD = 6$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{36}{9} = 4$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 9 - 4 = 5$.
Ответ: 5.

Решения. Вариант 60

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4; Журавушка — 1; Иваново — 2.
Ответ: 412.

Задание 2

Путь занимает 5 клеток.
Длина пути равна $5 \cdot 2 = 10$ км.
Ответ: 10.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 10 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ км.
Ответ: 26.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\dfrac{22}{24} \cdot 60 + \dfrac{26}{12} \cdot 60 = 185$.
Ответ: 185.

Задание 5

Васильково: $3 \cdot 65 + 1{,}5 \cdot 640 + 2 \cdot 835 = 2825$ руб.
Иваново: $3 \cdot 55 + 1{,}5 \cdot 625 + 2 \cdot 859 = 2820{,}5$ руб.
Камышино: $3 \cdot 50 + 1{,}5 \cdot 649 + 2 \cdot 880 = 2883{,}5$ руб.
Журавушка: $3 \cdot 58 + 1{,}5 \cdot 670 + 2 \cdot 850 = 2879$ руб.
Наименьшая стоимость — $2820{,}5$ руб.
Ответ: 2820,5.

Задание 6

Сумма в скобках равна $3{,}7$.
$3{,}7 : 0{,}5 = 7{,}4$.
Ответ: 7,4.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{311}$ приблизительно равно $-17{,}635$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{4 \cdot 2 - 7} = 2^1 = 2$.
Ответ: 2.

Задание 9

$8x = 116 - (-8) = 124$, поэтому $x = 15{,}5$.
Ответ: 15,5.

Задание 10

На 4 делятся числа $4, 8, \ldots, 20$; их 5. Вероятность равна $\dfrac{5}{20} = 0{,}25$.

Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = 3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = 2x$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = x + 2$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 46{,}5}{11 + 20} = 3$.

Ответ: 3.

Задание 13

Получаем $-3x > -27$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 9)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_9 = -3 + (9-1) \cdot (2) = 13$.

Ответ: 13.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 38° - 30° = 112°$.

Ответ: 112.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 120° : 2 = 60°$.

Ответ: 60.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{19 + 11}{2} \cdot 13 = 195$.

Ответ: 195.

Задание 18

Основание занимает 6 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=1-x$. Подставим во второе: $x^2+(1-x)^2=5$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-x-2=0$.
Разложим на множители: $(x+1)(x-2)=0$. Следовательно, $x=-1$ или $x=2$.
При $x=-1$ первое уравнение даёт $y=2$; при $x=2$ получаем $y=-1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 1, сумма их квадратов равна 5.
Ответ: $(x;y)=(-1;2)$ или $(x;y)=(2;-1)$.

Задание 21

Моторная лодка прошла 57 км по течению реки и 13 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{57}{x+3}+\dfrac{13}{x-3}=4$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $4x^2-70x+96=0$. Его корни: $x=16$ и $x=\dfrac{3}{2}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=16$ времена равны 3 ч и 1 ч, их сумма 4 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

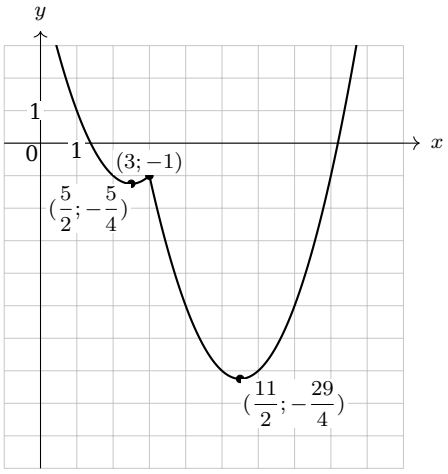
Постройте график функции $y = x^2 - 8x + 14 - 3|x - 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.

При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{5}{4}$ два; при $m = -\frac{5}{4}$ три.

При $-\frac{5}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{5}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 12$, $BF = 16$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$.
Ответ: 20.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 14$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 7$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 14/\cos 30^\circ = \dfrac{28\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$.

Решения. Вариант 61

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Берёзовка — 3; Луговое — 1; Сосновка — 2.
Ответ: 312.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $24 + 16 + 30 = 70$ км.
Ответ: 70.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 16 и 30 км.
Её длина $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$ км.
Ответ: 34.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 24 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 34 км.
Время: $\frac{24}{75} \cdot 60 + \frac{34}{25} \cdot 60 = 100{,}8$ мин.
Ответ: 100,8.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\frac{70 \cdot 7}{100} \cdot 69 = 338{,}1$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\frac{50 \cdot 9}{100} \cdot 69 = 310{,}5$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\frac{24 \cdot 7 + 34 \cdot 9}{100} \cdot 69 = 327{,}06$ руб.
Наименьшая стоимость — $310{,}5$ руб.
Ответ: 310,5.

Задание 6

$(-10)^2 = 100$, $11^2 = 121$. Поэтому значение выражения равно $100 - 121 = -21$.
Ответ: -21.

Задание 7

Значение числа $\frac{121}{17}$ приблизительно равно $7{,}118$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $5 + 2\sqrt{85} + 17 - 2\sqrt{85} = 22$.
Ответ: 22.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 8)(x - 6) = 0$. Корни: -8 и 6.
Требуемый корень равен 6.
Ответ: 6.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 4 = 196$. Вероятность равна $\dfrac{196}{200} = 0{,}98$.

Ответ: $0{,}98$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{12 \cdot 20}{20 - 12} = 30$ Ом.

Ответ: 30.

Задание 13

Нули множителей: -8 и 2. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-8; 2)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 19-го ряда число мест увеличивается 18 раз: $13 + 18 \cdot 3 = 67$.
Ответ: 67.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, поэтому каждый равен 36°.
Ответ: 36.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{10 \cdot 10}{2} = 50$.

Ответ: 50.

Задание 18

Основания равны 3 и 5, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{3 + 5}{2} \cdot 3 = 12$.

Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-49}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-49 = (x-7)(x+7)$.
Критические точки: -7, 2, 7. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -7 и 7 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-7]\cup(2;7]$.

Задание 21

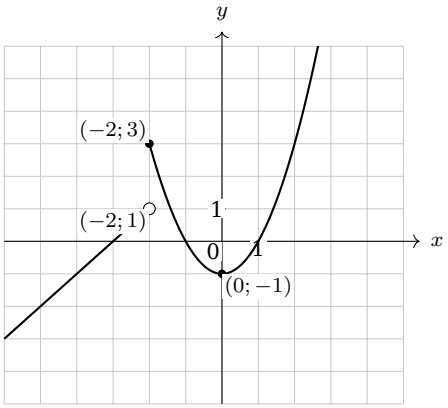
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 10 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 15 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+15$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+15)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+15}=\dfrac{1}{10}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+15)=10(2x+15)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=15$ и $x=-10$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{10}$, поэтому время совместной работы равно 10 ч.
Ответ: 15 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x)^2-1, & x\geq -2,\\ x+3, & x<-2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0;-1)$, оставленная при $x\geq -2$. Точка $(-2;3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+3$ при $x<-2$. Его конечная точка $(-2;1)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(-2;3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $1\leq m\leq 3$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=6$, $CK=15$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=6$. Сторона $BC=BK+CK=21$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(6+21)=54$.
Ответ: 54.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 7$, $BC = 10$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 10$ и $BH = AC = 7$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 7|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-7)^2 + 10^2$.

После раскрытия скобок получаем $14R = 149$. Поэтому $R = \dfrac{149}{14}$.

Ответ: $\dfrac{149}{14}$.

Решения. Вариант 62

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

$V = 3{,}7 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}4 = 22{,}2$ м^3.
Ответ: 22,2.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $60 : 2 = 30$ см и 40 см.
$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ см.
Ответ: 50.

Задание 4

После скидки остаётся 80% цены. Получаем $32200 \cdot \dfrac{80}{100} = 25760$ руб.
Ответ: 25760.

Задание 5

Объём парной равен $22{,}2$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $32200 + 1050 = 33250$ руб.
Печь № 3: $26800 + 1050 + 5550 = 33400$ руб.
Наименьшая сумма — 33250 руб.
Ответ: 33250.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $1 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3}{2}$.
Умножаем на 4 и получаем -6.
Ответ: -6.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{214}$ приблизительно равно $14{,}629$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$11 + 2 = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 1$. Из равенства получаем $x - (1) = -\dfrac{18}{5}$.
$x = -2{,}6$. Это значение допустимо, так как числитель $-18 \neq 0$.
Ответ: $-2{,}6$.

Задание 10

Всего шаров $39+7+4=50$. Благоприятных исходов 7, поэтому вероятность равна $\frac{7}{50}=0{,}14$.
Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 2, $y=x^2-2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y=x+1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x=1$. Ему соответствует формула 1, $y=\frac{3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m=\frac{2E}{v^2}=\frac{2\cdot 504}{12^2}=7$ кг.
Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x>0$, второе — $x\le 10$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(0;10]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n=b_1q^{n-1}$, поэтому $b_5=9\cdot 2^4=144$.
Ответ: 144.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2+AC^2=15^2+8^2=289$. Длина положительна, поэтому $BC=17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{16^2+30^2}=34$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R=34:2=17$.
Ответ: 17.

Задание 17

$S=AD\cdot BH=24\cdot 11=264$.
Ответ: 264.

Задание 18

Основание равно 6, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S=6\cdot 5=30$.
Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 25(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-25) = (x+2)(x-5)(x+5) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-5;\ -2;\ 5$.
Ответ: $-5;\ -2;\ 5$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 14 км/ч, второго 14 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками 77 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

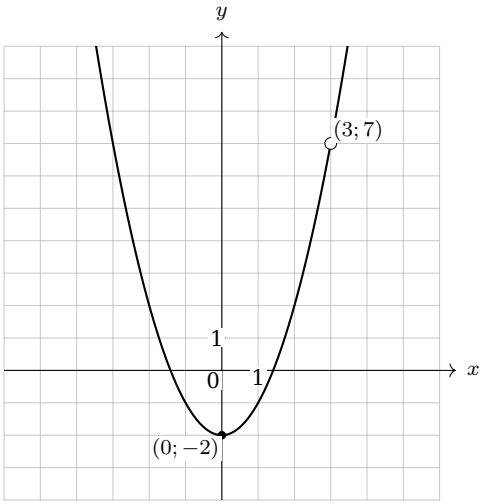
Сумма путей: $14(t - \frac{1}{2}) + 14t = 77$. Отсюда $28t = 84$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $14 \cdot 3 = 42$ км. Время движения первого $\frac{5}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 42 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-2)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(0; -2)$ и выколотой точкой $(3; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 3$, $AC = 9$, $NC = 16$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 16$. По подобию $\dfrac{x}{x+16} = \dfrac{3}{9}$.
Отсюда $9x = 3(x + 16)$, то есть $6x = 48$. Получаем $BN = 8$.
Ответ: 8.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 52$, $BC = 40$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{200}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 52 - \dfrac{200}{13} = \dfrac{476}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 40 \cdot \dfrac{\frac{476}{13}}{52} = \dfrac{4760}{169}$.

Ответ: $\dfrac{4760}{169}$.

Решения. Вариант 63

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 3.
Ответ: 3.

Задание 2

Лимит равен 350 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 3, 4, 5, 10, 12.
Всего таких месяцев — 6.
Ответ: 6.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{12+14+8+16}{4} = 12{,}5$ ГБ.
Ответ: $12{,}5$.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 12 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 150 минут и 0 ГБ.
Плата: $520 + 150 \cdot 2 + 0 \cdot 65 = 820$ руб.
Ответ: 820.

Задание 5

За месяц № 5 использовано 600 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $520 + 250 \cdot 2 + 0 \cdot 65 = 1020$ руб.
«Расширенный»: $755 + 100 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 955$ руб.
Наименьшая плата — 955 руб.
Ответ: 955.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}9$.
$9{,}9 : 0{,}4 = 24{,}75$.
Ответ: $24{,}75$.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{479}$ приблизительно равно $-21{,}886$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{4\cdot 2-5} = 4^{3} = 64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$5x = -21{,}5 - (1) = -22{,}5$, поэтому $x = -4{,}5$.
Ответ: $-4{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 96$; их 16. Вероятность равна $\dfrac{16}{100} = 0{,}16$.
Ответ: $0{,}16$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -3x$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = -x - 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 104$: $C = \dfrac{5}{9}(104 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (72) = 40$.
Ответ: 40.

Задание 13

$16 = 4^2$. Требуются числа, модуль которых больше 4.
Множество решений: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{13} = 2 + (13 - 1) \cdot (-5) = -58$.
Ответ: -58.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 33° - 38° = 109°$.
Ответ: 109.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 72 : 2 = 36$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $42 : 2 = 21$. Вторая сторона: $21 - 18 = 3$.
Площадь равна $18 \cdot 3 = 54$.
Ответ: 54.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 5 и 3, поэтому площадь равна $5 \cdot 3 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{20}{x-48}+\dfrac{20}{x+48}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 48$ и $x\neq -48$.
Умножим уравнение на $(x-48)(x+48)$: $20(x+48)+20(x-48)=x^2-2304$.
Получим $x^2-40x-2304=0$, или $(x-20)^2=2704=52^2$.
Поэтому $x=20-52=-32$ или $x=20+52=72$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-32;\ 72$.

Задание 21

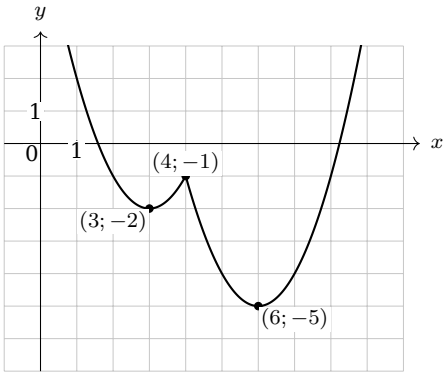
Имеются два сплава с содержанием меди 10% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70-x$ кг, причём $0<x<70$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{10}{100}x+\dfrac{70}{100}(70-x)=\dfrac{45}{100}\cdot 70$.
Умножим на 100: $10x+4900-70x=3150$. Поэтому $60x=1750$ и $x=\dfrac{175}{6}$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{175}{6}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=x^2-9x+19-3|x-4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t=x-4$. При $t<0$ получаем $y=t^2+2t-1$, при $t\geq 0$ — $y=t^2-4t-1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1;-2)$ и $(2;-5)$. В точке $t=0$ обе части дают $y=-1$.
При $m<-5$ пересечений нет; при $m=-5$ одно; при $-5<m<-2$ два; при $m=-2$ три.
При $-2<m<-1$ пересечений четыре. При $m=-1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m>-1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m=-2$ или $m=-1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 52, а основание равно 40. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 48 = 960$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{52 \cdot 52 \cdot 40}{4 \cdot 960} = \dfrac{169}{6}$.

Ответ: $\dfrac{169}{6}$.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 32$, $CD = 68$, основание $BC = 4$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 68 - 4 = 64$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 32$, $AP = BC = 4$, $PD = AD - BC = 60$.
В треугольнике CPD выполняется $32^2 + 60^2 = 68^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 32.

Площадь $S = \dfrac{64 + 4}{2} \cdot 32 = 1088$.

Ответ: 1088.

Решения. Вариант 64

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А6 — размеры № 1, А4 — размеры № 3, А2 — размеры № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

При переходе от А1 к А5 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $3 \cdot 2^4 = 48$ листов.
Ответ: 48.

Задание 3

Размеры листа равны $10{,}5$ см и $14{,}8$ см.
Площадь $10{,}5 \cdot 14{,}8 = 155{,}4$ см^2.
Ответ: 155,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}297 \cdot 0{,}42 = 0{,}12474$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}12474 \cdot 90 \cdot 250}{1000} = 2{,}80665$ кг.
После округления получаем $2{,}8$ кг.
Ответ: 2,8.

Задание 5

Всего нужно $865 \cdot 3 = 2595$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2595}{250} \right\rceil = 11$.
Стоимость: $11 \cdot 420 = 4620$ руб.
Ответ: 4620.

Задание 6

$(-18)^2 = 324$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $324 - 16 = 308$.
Ответ: 308.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{128}{11}$ приблизительно равно $11{,}636$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{165} + 11 - 2\sqrt{165} = 26$.
Ответ: 26.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-1)(x-8) = 0$. Корни: 1 и 8.
Требуемый корень равен 1.
Ответ: 1.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 6 = 994$. Вероятность равна $\dfrac{994}{1000} = 0{,}994$.
Ответ: $0{,}994$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 65}{6+20} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

Получаем $2x \geq -4$. Делим на 2, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $[-2; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 13-го ряда число мест увеличивается 12 раз: $14 + 12 \cdot 2 = 38$.
Ответ: 38.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 88^\circ = 92^\circ$, поэтому каждый равен 46°.
Ответ: 46.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 140^\circ : 2 = 70^\circ$.
Ответ: 70.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{25 + 7}{2} \cdot 14 = 224$.
Ответ: 224.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 8 и 6. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 58x^2 + 441 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 58t + 441 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 49) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 49$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 49$ — $x = \pm 7$.
Ответ: $-7;\ -3;\ 3;\ 7$.

Задание 21

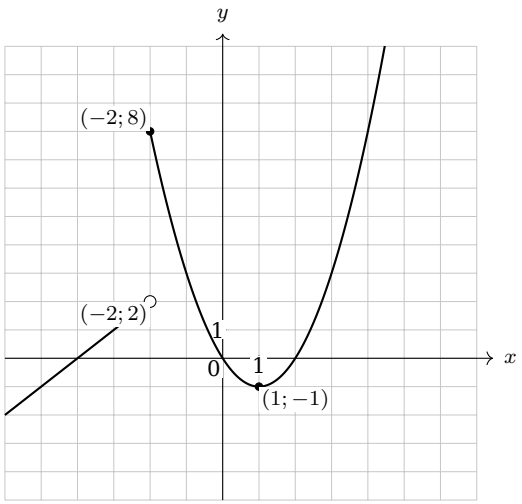
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 120 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{x+3} = 2$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $360 = 2x(x+3)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 12)(x + 15) = 0$.
Корень $x = -15$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 12 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-1)^2-1, & x\geq -2,\\ x+4, & x<-2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(1;-1)$, оставленная при $x\geq -2$. Точка $(-2;8)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+4$ при $x<-2$. Его конечная точка $(-2;2)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $2\leq m\leq 8$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>8$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 8 включена, поскольку точка $(-2;8)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $2\leq m\leq 8$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 4 и 25. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $4+25=29$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=29\cdot 4$ и $v^2=29\cdot 25$.
Поэтому $u=2\sqrt{29}$, $v=5\sqrt{29}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=29+7\sqrt{29}$.
Ответ: $29+7\sqrt{29}$.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 10$, $MD = 7$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 49$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{49}{10} = \dfrac{49}{10}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 10 - \dfrac{49}{10} = \dfrac{51}{10}$.
Ответ: $\dfrac{51}{10}$.

Решения. Вариант 65

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 175, 185, 195 мм. Наибольшая из них — 195 мм.
Ответ: 195.

Задание 2

$H = 225 \cdot \dfrac{55}{100} = 123{,}75$ мм.
Ответ: 123,75.

Задание 3

Диаметр диска: $15 \cdot 25{,}4 = 381$ мм.
Высота боковины: $175 \cdot \dfrac{65}{100} = 113{,}75$ мм.
$D = 381 + 2 \cdot 113{,}75 = 608{,}5$ мм.
Ответ: 608,5.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$175 \cdot \dfrac{60}{100} - 185 \cdot \dfrac{55}{100} = 3{,}25$ мм.
Ответ: 3,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $16 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 175 \cdot \dfrac{60}{100} = 616{,}4$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{616{,}4 - 608{,}5}{608{,}5} \cdot 100\% \approx 1{,}3\%$.
Ответ: 1,3.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{17}{8} - \dfrac{7}{10} = \dfrac{57}{40}$.
Умножаем на 3 и получаем $4{,}275$.
Ответ: 4,275.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{329}$ приблизительно равно $18{,}138$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -7$. Из равенства получаем $x - (-7) = -\dfrac{13}{2}$.
$x = -13{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-13 \neq 0$.
Ответ: $-13{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $10 + 36 + 4 = 50$. Благоприятных исходов 36, поэтому вероятность равна $\dfrac{36}{50} = 0{,}72$.
Ответ: $0{,}72$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{21{,}6 \cdot 36}{36 - 21{,}6} = 54$ Ом.
Ответ: 54.

Задание 13

Нули множителей: -12 и -5. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-12; -5]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 6 \cdot 2^3 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{8 \cdot 10}{2} = 40$.

Ответ: 40.

Задание 18

Основание занимает 4 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y = 3 - x$. Подставим во второе: $x^2 + (3 - x)^2 = 9$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2 - 3x = 0$.
Разложим на множители: $(x)(x - 3) = 0$. Следовательно, $x = 0$ или $x = 3$.
При $x = 0$ первое уравнение даёт $y = 3$; при $x = 3$ получаем $y = 0$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 3, сумма их квадратов равна 9.
Ответ: $(x; y) = (0; 3)$ или $(x; y) = (3; 0)$.

Задание 21

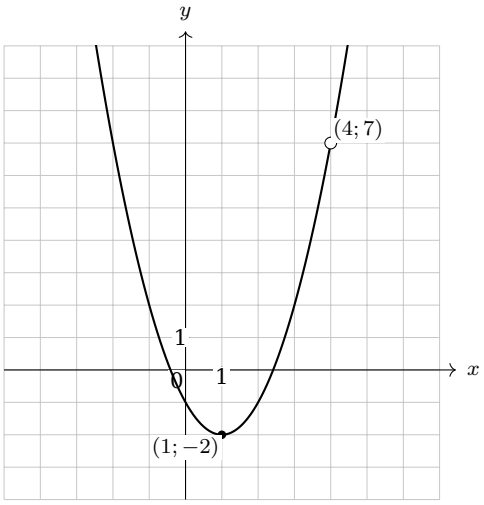
Моторная лодка прошла 66 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x > 4$. Скорости по течению и против течения равны $x + 4$ и $x - 4$.
Уравнение времени: $\dfrac{66}{x + 4} + \dfrac{28}{x - 4} = 5$.
После умножения на $(x + 4)(x - 4)$ и приведения получаем $5x^2 - 94x + 72 = 0$. Его корни: $x = 18$ и $x = \dfrac{4}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x > 4$. Для $x = 18$ времена равны 3 ч и 2 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-2x-1)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(1; -2)$ и выколотой точкой $(4; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 20$, $BF = 48$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{400 + 2304} = 52$.
Ответ: 52.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 15$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{15}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 15/\cos 45^\circ = 15\sqrt{2}$.

Ответ: $15\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 66

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

баня — 6; яблони — 5; жилой дом — 3; теплица — 1.
Ответ: 6531.

Задание 2

По условию площадь площадки равна 64 м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 64 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \dfrac{64}{8} \right\rceil = 8$.
Ответ: 8.

Задание 3

Баня занимает 8 клеток, теплица — 3 клетки. Всего 11 клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $11 \cdot 4 = 44$ м^2.
Ответ: 44.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Расстояние $\sqrt{(4 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 2)^2} = 10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(25000 + 38188) - (19000 + 11500) = 32688$ руб.
Газ за час: $1{,}2 \cdot 8 = 9{,}6$ руб.; электричество: $10 \cdot 5{,}5 = 55$ руб.
Экономия за час равна $45{,}4$ руб. Срок: $32688 : 45{,}4 = 720$ ч.
Ответ: 720.

Задание 6

Сумма в скобках равна $8{,}5$.
$8{,}5 : 0{,}8 = 10{,}625$.
Ответ: $10{,}625$.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{66}$ приблизительно равно $-8{,}124$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{2 \cdot 2 - 2} = 6^2 = 36$.
Ответ: 36.

Задание 9

$5x = -17 - (-7) = -10$, поэтому $x = -2$.
Ответ: -2.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 96$; их 16. Вероятность равна $\dfrac{16}{100} = 0{,}16$.

Ответ: $0{,}16$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = -3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 2x - 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 243}{9^2} = 6$ кг.

Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -10$, второе — $x \le -2$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-10; -2]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_6 = 4 + (6-1) \cdot (-2) = -6$.
Ответ: -6.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 60° - 64° = 56°$.
Ответ: 56.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 17 : 2 = 8{,}5$.
Ответ: $8{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 22 \cdot 4 = 88$.
Ответ: 88.

Задание 18

Основания равны 4 и 9, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{4+9}{2} \cdot 4 = 26$.

Ответ: 26.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-64}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-64 = (x-8)(x+8)$.
Критические точки: -8, 2, 8. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -8 и 8 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-8]\cup(2;8]$.

Задание 21

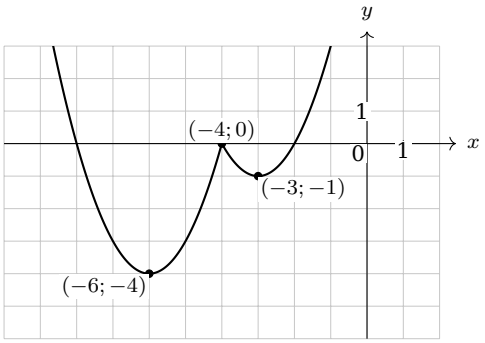
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 8 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 30 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+30$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+30)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+30} = \dfrac{1}{8}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+30) = 8(2x+30)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 10$ и $x = -24$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{40} = \dfrac{1}{8}$, поэтому время совместной работы равно 8 ч.
Ответ: 10 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 9x + 20 - 3|x + 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -4)$ и $(1; -1)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -4$ пересечений нет; при $m = -4$ одно; при $-4 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 16$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 7$. Сторона $BC = BK + CK = 23$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(7 + 23) = 60$.
Ответ: 60.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 8$, $BC = 9$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 9$ и $BH = AC = 8$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 8|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-8)^2 + 9^2$.

После раскрытия скобок получаем $16R = 145$. Поэтому $R = \dfrac{145}{16}$.

Ответ: $\dfrac{145}{16}$.

Решения. Вариант 67

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; гостиная — 6; санузел — 1; кухня — 7.
Ответ: 3617.

Задание 2

Пол кухни занимает 90 клеток, его площадь $90 \cdot 0{,}4^2 = 14{,}4$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ м^2. Требуется $14{,}4 : 0{,}04 = 360$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{360}{8} \right\rceil = 45$ целых упаковок.
Ответ: 45.

Задание 3

На плане помещение занимает 30 клеток.
Его площадь $30 \cdot 0{,}4^2 = 4{,}8$ м^2.
Ответ: 4,8.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $410 + 0 \cdot 50 = 410$ руб.
Тариф «Б»: $560 + 0 \cdot 30 = 560$ руб.
Безлимитный тариф стоит 840 руб. Наименьшая плата — 410 руб.
Ответ: 410.

Задание 6

$(-10)^2 = 100$, $9^2 = 81$. Поэтому значение выражения равно $100 - 81 = 19$.
Ответ: 19.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{257}{17}$ приблизительно равно $15{,}118$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $11 + 2\sqrt{77} + 7 - 2\sqrt{77} = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+11)(x-4) = 0$. Корни: -11 и 4.
Требуемый корень равен 4.
Ответ: 4.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 14 = 486$. Вероятность равна $\dfrac{486}{500} = 0{,}972$.

Ответ: $0{,}972$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 41$: $C = \dfrac{5}{9}(41 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (9) = 5$.

Ответ: 5.

Задание 13

$16 = 4^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 4.
Множество решений: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 11-го ряда число мест увеличивается 10 раз: $28 + 10 \cdot 3 = 58$.
Ответ: 58.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, поэтому каждый равен 60°.
Ответ: 60.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 48 : 2 = 24$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $22 : 2 = 11$. Вторая сторона: $11 - 8 = 3$.
Площадь равна $8 \cdot 3 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 18

Основание равно 4, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 4 \cdot 5 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 36x - 108 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+3) - 36(x+3) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+3)(x^2-36) = (x+3)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -3;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -3;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 15 км/ч, второго 17 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками $84{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

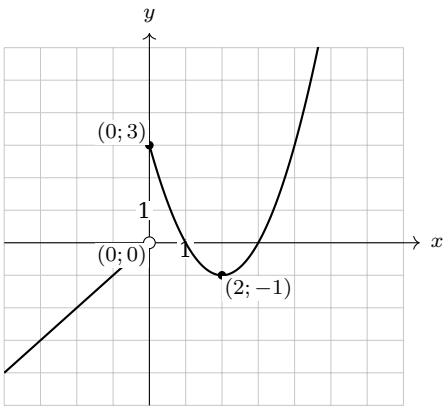
Сумма путей: $15(t - \dfrac{3}{4}) + 17t = \dfrac{339}{4}$. Отсюда $32t = 96$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $17 \cdot 3 = 51$ км. Время движения первого $\dfrac{9}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 51 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2-1, & x\geq 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;-1)$, оставленная при $x\geq 0$. Точка $(0;3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x$ при $x<0$. Его конечная точка $(0;0)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(0;3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $0\leq m\leq 3$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=4$, $AC=16$, $NC=17$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+17$. По подобию $\dfrac{x}{x+17}=\dfrac{4}{16}$.

Отсюда $16x=4(x+17)$, то есть $12x=68$. Получаем $BN=\dfrac{17}{3}$.

Ответ: $\dfrac{17}{3}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO=\angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 68$, $BC = 64$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{512}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 68 - \dfrac{512}{17} = \dfrac{644}{17}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 64 \cdot \dfrac{\frac{644}{17}}{68} = \dfrac{10304}{289}$.

Ответ: $\dfrac{10304}{289}$.

Решения. Вариант 68

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Камышино — 3; Журавушка — 1; Васильково — 4.
Ответ: 314.

Задание 2

Путь занимает $5 + 12 = 17$ клеток.
Длина пути равна $17 \cdot 1 = 17$ км.
Ответ: 17.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 16 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ км.
Ответ: 20.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\dfrac{11}{24} \cdot 60 + \dfrac{13}{15} \cdot 60 = 79{,}5$.
Ответ: $79{,}5$.

Задание 5

Васильково: $4 \cdot 56 + 0{,}5 \cdot 630 + 3 \cdot 866 = 3137$ руб.
Иваново: $4 \cdot 51 + 0{,}5 \cdot 654 + 3 \cdot 887 = 3192$ руб.
Камышино: $4 \cdot 59 + 0{,}5 \cdot 675 + 3 \cdot 857 = 3144{,}5$ руб.
Журавушка: $4 \cdot 66 + 0{,}5 \cdot 645 + 3 \cdot 842 = 3112{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — $3112{,}5$ руб.
Ответ: $3112{,}5$.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{3}{5} - 3 = -\dfrac{12}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем -12.
Ответ: -12.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{35}$ приблизительно равно $5{,}916$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = \dfrac{13}{2}$.
$x = 21{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $13 \neq 0$.
Ответ: $21{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $31 + 13 + 6 = 50$. Благоприятных исходов 13, поэтому вероятность равна $\dfrac{13}{50} = 0{,}26$.
Ответ: $0{,}26$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a + b} = \dfrac{2 \cdot 153}{7 + 27} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 13

Получаем $4x > 0$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(0; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 2 \cdot 2^3 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Длина положительна, поэтому $BC = 10$.
Ответ: 10.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 122^\circ : 2 = 61^\circ$.
Ответ: 61.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{23 + 5}{2} \cdot 6 = 84$.
Ответ: 84.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 5 и 2, поэтому площадь равна $5 \cdot 2 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 2 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{32}{x-60} + \dfrac{32}{x+60} = 1$.
Область допустимых значений: $x \neq 60$ и $x \neq -60$.
Умножим уравнение на $(x-60)(x+60)$: $32(x+60) + 32(x-60) = x^2 - 3600$.
Получим $x^2 - 64x - 3600 = 0$, или $(x-32)^2 = 4624 = 68^2$.
Поэтому $x = 32 - 68 = -36$ или $x = 32 + 68 = 100$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-36;\ 100$.

Задание 21

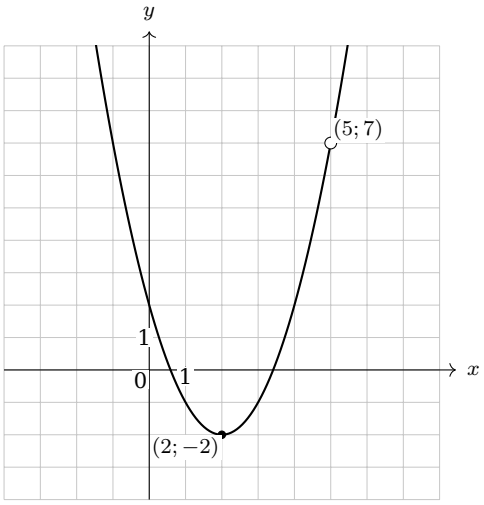
Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70 - x$ кг, причём $0 < x < 70$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{15}{100}x + \dfrac{75}{100}(70 - x) = \dfrac{50}{100} \cdot 70$.
Умножим на 100: $15x + 5250 - 75x = 3500$. Поэтому $60x = 1750$ и $x = \dfrac{175}{6}$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{175}{6}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-5)(x^2-4x+2)}{x-5}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 5$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(2; -2)$ и выколотой точкой $(5; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 68, а основание равно 64. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 64 \cdot 60 = 1920$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{68 \cdot 68 \cdot 64}{4 \cdot 1920} = \dfrac{578}{15}$.
Ответ: $\dfrac{578}{15}$.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 60$, $CD = 68$, основание $BC = 18$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 68 - 18 = 50$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 60$, $AP = BC = 18$, $PD = AD - BC = 32$.
В треугольнике CPD выполняется $60^2 + 32^2 = 68^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 60.
Площадь $S = \dfrac{50 + 18}{2} \cdot 60 = 2040$.
Ответ: 2040.

Решения. Вариант 69

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Сосновка — 1; Луговое — 3; Озёрное — 2.
Ответ: 132.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $22 + 10 + 24 = 56$ км.
Ответ: 56.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 32 и 24 км.
Её длина $\sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ км.
Ответ: 40.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 22 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 26 км.
Время: $\dfrac{22}{60} \cdot 60 + \dfrac{26}{40} \cdot 60 = 61$ мин.
Ответ: 61.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{56 \cdot 7{,}5}{100} \cdot 71 = 298{,}2$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{40 \cdot 10}{100} \cdot 71 = 284$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{22 \cdot 7{,}5 + 26 \cdot 10}{100} \cdot 71 = 301{,}75$ руб.

Наименьшая стоимость — 284 руб.
Ответ: 284.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}5$.
$9{,}5 : 0{,}4 = 23{,}75$.
Ответ: 23,75.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{153}$ приблизительно равно $-12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{3 \cdot 2 - 5} = 2^1 = 2$.
Ответ: 2.

Задание 9

$2x = -42 - (-23) = -19$, поэтому $x = -9{,}5$.
Ответ: $-9{,}5$.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 48$; их 6. Вероятность равна $\frac{6}{50} = 0{,}12$.
Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{4{,}8 \cdot 8}{8 - 4{,}8} = 12$ Ом.
Ответ: 12.

Задание 13

Нули множителей: -5 и 4. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-5; 4)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{12} = -12 + (12 - 1) \cdot (4) = 32$.
Ответ: 32.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 40° - 40° = 100°$.
Ответ: 100.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{24 \cdot 20}{2} = 240$.
Ответ: 240.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Это формула площади параллелограмма.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 80x^2 + 1024 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 80t + 1024 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 64) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 64$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 64$ — $x = \pm 8$.
Ответ: $-8;\ -4;\ 4;\ 8$.

Задание 21

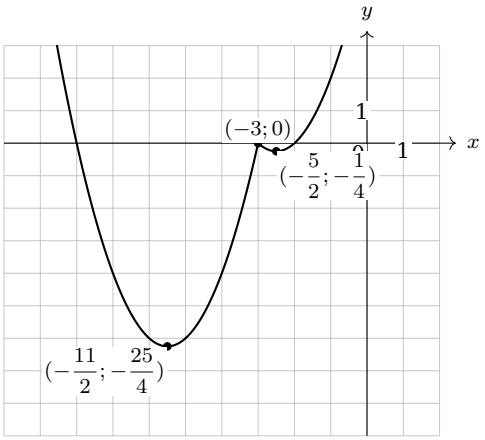
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 240 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{240}{x} - \dfrac{240}{x+4} = 2$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $960 = 2x(x+4)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 20)(x + 24) = 0$.
Корень $x = -24$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 20 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 20 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 8x + 15 - 3|x + 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t + 0$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$ и $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{1}{4}$ два; при $m = -\frac{1}{4}$ три.
При $-\frac{1}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{1}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 18 и 50. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $18 + 50 = 68$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 68 \cdot 18$ и $v^2 = 68 \cdot 50$.
Поэтому $u = 6\sqrt{34}$, $v = 10\sqrt{34}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 68 + 16\sqrt{34}$.
Ответ: $68 + 16\sqrt{34}$.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 11$, $MD = 8$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 64$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{64}{11} = \dfrac{64}{11}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 11 - \dfrac{64}{11} = \dfrac{57}{11}$.
Ответ: $\dfrac{57}{11}$.

Решения. Вариант 70

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м^3 — печь № 2, 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 213.

Задание 2

$V = 3{,}8 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}4 = 25{,}536$ м^3.
Ответ: 25,536.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $20 : 2 = 10$ см и 24 см.
$R = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26$ см.
Ответ: 26.

Задание 4

После скидки остаётся 90% цены. Получаем $32800 \cdot \dfrac{90}{100} = 29520$ руб.
Ответ: 29520.

Задание 5

Объём парной равен $25{,}536$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $32800 + 1100 = 33900$ руб.
Печь № 3: $27200 + 1100 + 5700 = 34000$ руб.
Наименьшая сумма — 33900 руб.
Ответ: 33900.

Задание 6

$(-4)^2 = 16$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $16 - 16 = 0$.
Ответ: 0.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{216}{11}$ приблизительно равно $19{,}636$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{165} + 11 - 2\sqrt{165} = 26$.
Ответ: 26.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 7)(x - 12) = 0$. Корни: -7 и 12.
Требуемый корень равен -7.
Ответ: -7.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 22 = 978$. Вероятность равна $\dfrac{978}{1000} = 0{,}978$.

Ответ: $0{,}978$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 300}{10^2} = 6$ кг.

Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 1$, второе — $x \leq 5$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(1; 5]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 20-го ряда число мест увеличивается 19 раз: $13 + 19 \cdot 3 = 70$.
Ответ: 70.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$, поэтому каждый равен 49°.
Ответ: 49.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{24^2 + 45^2} = 51$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 51 : 2 = 25{,}5$.
Ответ: $25{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 7 \cdot 5 = 35$.
Ответ: 35.

Задание 18

Основание занимает 3 клеток, высота — 2 клеток. Площадь равна $\dfrac{3 \cdot 2}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 2 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2+y^2=17. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=5-x$. Подставим во второе: $x^2+(5-x)^2=17$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-5x+4=0$.
Разложим на множители: $(x-1)(x-4)=0$. Следовательно, $x=1$ или $x=4$.
При $x=1$ первое уравнение даёт $y=4$; при $x=4$ получаем $y=1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 5, сумма их квадратов равна 17.
Ответ: $(x;y)=(1;4)$ или $(x;y)=(4;1)$.

Задание 21

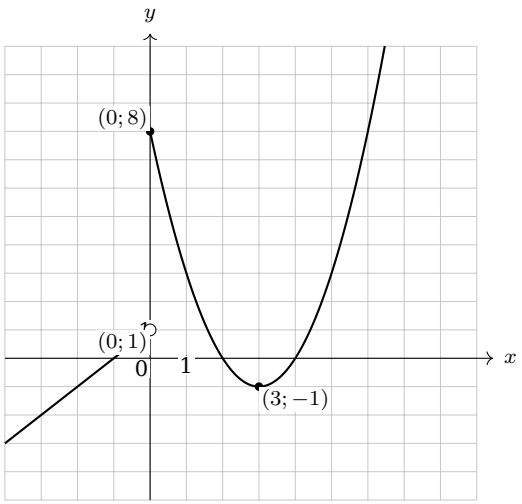
Моторная лодка прошла 75 км по течению реки и 45 км против течения, затратив на весь путь 6 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{75}{x+5}+\dfrac{45}{x-5}=6$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $6x^2-120x=0$. Его корни: $x=20$ и $x=0$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=20$ времена равны 3 ч и 3 ч, их сумма 6 ч.
Ответ: 20 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-3)^2-1, & x\geq 0,\\ x+1, & x<0.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3;-1)$, оставленная при $x\geq 0$. Точка $(0;8)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+1$ при $x<0$. Его конечная точка $(0;1)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 8$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>8$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 8 включена, поскольку точка $(0;8)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $1\leq m\leq 8$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=32$, $BF=60$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{1024+3600}=68$.
Ответ: 68.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF+\angle EAF=180^\circ$. При этом $\angle EAF=\angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC=\angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 16$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 8$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 16/\cos 60^\circ = 32$.
Ответ: 32.

Решения. Вариант 71

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 2, 4, 11, 12.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{18+12+20+22}{4}=18$ ГБ.
Ответ: 18.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 4 ГБ.
Плата: $530+0\cdot 2+4\cdot 70=810$ руб.
Ответ: 810.

Задание 5

За месяц № 12 использовано 500 минут и 22 ГБ.
«Основной»: $530+100\cdot 2+12\cdot 70=1570$ руб.
«Расширенный»: $770+0\cdot 2+2\cdot 50=870$ руб.
Наименьшая плата — 870 руб.
Ответ: 870.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{10}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{5}$.
Умножаем на 3 и получаем $1{,}8$.
Ответ: $1{,}8$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{98}$ приблизительно равно $9{,}899$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$13+3=16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 3$. Из равенства получаем $x-(3)=\frac{5}{8}$.
$x = 3{,}625$. Это значение допустимо, так как числитель $5 \neq 0$.
Ответ: $3{,}625$.

Задание 10

Всего шаров $14 + 22 + 4 = 40$. Благоприятных исходов 22, поэтому вероятность равна $\frac{22}{40} = 0{,}55$.
Ответ: $0{,}55$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{1}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 140$: $C = \frac{5}{9}(140 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (108) = 60$.
Ответ: 60.

Задание 13

$169 = 13^2$. Требуются числа, модуль которых больше 13.
Множество решений: $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 4 \cdot 2^3 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 60^2 + 32^2 = 4624$. Длина положительна, поэтому $BC = 68$.
Ответ: 68.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $22 : 2 = 11$. Вторая сторона: $11 - 5 = 6$.
Площадь равна $5 \cdot 6 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 18

Основания равны 6 и 9, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{6+9}{2} \cdot 2 = 15$.

Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-81}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 2$. Разложим числитель: $x^2-81 = (x-9)(x+9)$.
Критические точки: -9, 2, 9. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -9 и 9 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-9] \cup (2;9]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $7{,}2$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 6 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+6$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+6)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{5}{36}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+6) = \dfrac{36}{5}(2x+6)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 12$ и $x = -\dfrac{18}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

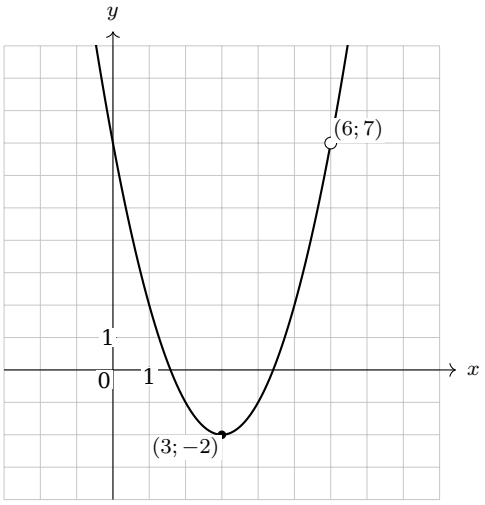
Проверка: $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{5}{36}$, поэтому время совместной работы равно $7{,}2$ ч.

Ответ: 12 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-6)(x^2-6x+7)}{x-6}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 6$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(3; -2)$ и выколотой точкой $(6; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 17$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 8$. Сторона $BC = BK + CK = 25$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(8 + 25) = 66$.
Ответ: 66.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 6$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 6$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 6^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 45$. Поэтому $R = \dfrac{15}{2}$.

Ответ: $\dfrac{15}{2}$.

Решения. Вариант 72

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А2 — размеры № 2, А3 — размеры № 1, А5 — размеры № 3.
Ответ: 213.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $3 \cdot 2^4 = 48$ листов.
Ответ: 48.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}297 \cdot 0{,}42 = 0{,}12474$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}12474 \cdot 100 \cdot 400}{1000} = 4{,}9896$ кг.
После округления получаем 5 кг.
Ответ: 5.

Задание 5

Всего нужно $900 \cdot 4 = 3600$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{3600}{400} \right\rceil = 9$.
Стоимость: $9 \cdot 440 = 3960$ руб.
Ответ: 3960.

Задание 6

Сумма в скобках равна $7{,}6$.
$7{,}6 : 0{,}8 = 9{,}5$.
Ответ: 9,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{285}$ приблизительно равно $-16{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3 \cdot 2 - 3} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$4x = -17 - (-17) = 0$, поэтому $x = 0$.
Ответ: 0.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 96$; их 16. Вероятность равна $\dfrac{16}{100} = 0{,}16$.
Ответ: $0{,}16$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -2x - 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 119}{5 + 29} = 7$.
Ответ: 7.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -5$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_9 = 25 + (9-1) \cdot (6) = 73$.
Ответ: 73.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 63° - 64° = 53°$.
Ответ: 53.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 54° : 2 = 27°$.
Ответ: 27.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{20 + 4}{2} \cdot 10 = 120$.
Ответ: 120.

Задание 18

Основание равно 6, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 6 \cdot 5 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 49x - 196 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 49(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+4)(x^2-49) = (x+4)(x-7)(x+7) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-7;\ -4;\ 7$.
Ответ: $-7;\ -4;\ 7$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 10 км/ч, второго 13 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $89{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

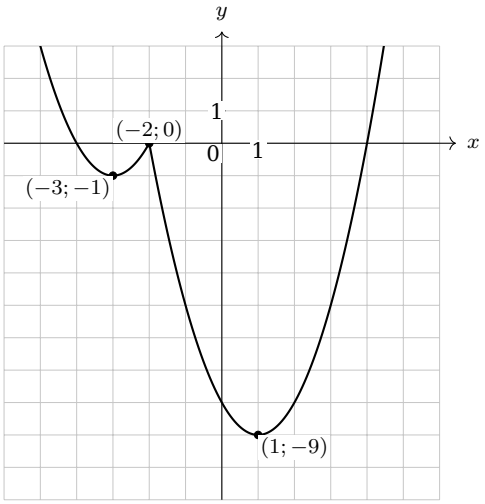
Сумма путей: $10(t - \frac{1}{4}) + 13t = \frac{179}{2}$. Отсюда $23t = 92$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $13 \cdot 4 = 52$ км. Время движения первого $\frac{15}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 52 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 4|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 6t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; -1)$ и $(3; -9)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -9$ пересечений нет; при $m = -9$ одно; при $-9 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 5$, $AC = 10$, $NC = 18$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 18$. По подобию $\dfrac{x}{x + 18} = \dfrac{5}{10}$.
Отсюда $10x = 5(x + 18)$, то есть $5x = 90$. Получаем $BN = 18$.
Ответ: 18.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 25$, $BC = 30$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.
В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = 18$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 25 - 18 = 7$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 30 \cdot \dfrac{7}{25} = \dfrac{42}{5}$.

Ответ: $\dfrac{42}{5}$.

Решения. Вариант 73

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 185, 195 мм. Наименьшая из них — 185 мм.
Ответ: 185.

Задание 2

$H = 235 \cdot \dfrac{55}{100} = 129{,}25$ мм.
Ответ: 129,25.

Задание 3

Диаметр диска: $16 \cdot 25{,}4 = 406{,}4$ мм.
Высота боковины: $185 \cdot \dfrac{65}{100} = 120{,}25$ мм.
$D = 406{,}4 + 2 \cdot 120{,}25 = 646{,}9$ мм.
Ответ: 646,9.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$185 \cdot \dfrac{60}{100} - 195 \cdot \dfrac{55}{100} = 3{,}75$ мм.
Ответ: 3,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $17 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 185 \cdot \dfrac{60}{100} = 653{,}8$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{653{,}8 - 646{,}9}{646{,}9} \cdot 100\% \approx 1{,}1\%$.
Ответ: 1,1.

Задание 6

$(-13)^2 = 169$, $8^2 = 64$. Поэтому значение выражения равно $169 - 64 = 105$.
Ответ: 105.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{67}{11}$ приблизительно равно $6{,}091$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $7 + 2\sqrt{98} + 14 - 2\sqrt{98} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+12)(x-11)=0$. Корни: -12 и 11.
Требуемый корень равен 11.
Ответ: 11.

Задание 10

Исправных ламп $500-17=483$. Вероятность равна $\dfrac{483}{500}=0{,}966$.
Ответ: $0{,}966$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y=x^2-1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1+R_2)=R_1R_2$ получаем $R_2=\dfrac{RR_1}{R_1-R}$.
$R_2=\dfrac{4{,}8\cdot 8}{8-4{,}8}=12$ Ом.
Ответ: 12.

Задание 13

Нули множителей: 1 и 12. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[1;12]$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 16-го ряда число мест увеличивается 15 раз: $19+15\cdot 4=79$.
Ответ: 79.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-106^\circ=74^\circ$, поэтому каждый равен 37°.
Ответ: 37.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT=\sqrt{OP^2-OT^2}=\sqrt{51^2-24^2}=45$.
Ответ: 45.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S=\dfrac{14\cdot 12}{2}=84$.
Ответ: 84.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 4, поэтому площадь равна $4 \cdot 4 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{15}{x-20} + \dfrac{15}{x+20} = 1$.
Область допустимых значений: $x \neq 20$ и $x \neq -20$.
Умножим уравнение на $(x-20)(x+20)$: $15(x+20) + 15(x-20) = x^2 - 400$.
Получим $x^2 - 30x - 400 = 0$, или $(x-15)^2 = 625 = 25^2$.
Поэтому $x = 15 - 25 = -10$ или $x = 15 + 25 = 40$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-10;\ 40$.

Задание 21

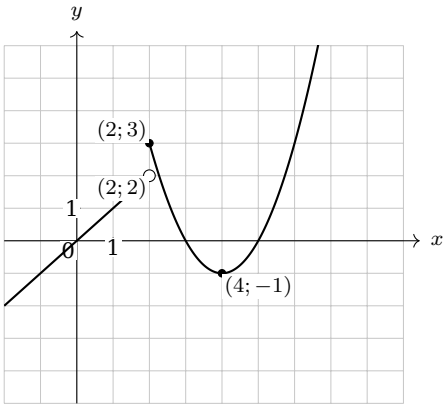
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80 - x$ кг, причём $0 < x < 80$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{20}{100}x + \dfrac{65}{100}(80 - x) = \dfrac{35}{100} \cdot 80$.
Умножим на 100: $20x + 5200 - 65x = 2800$. Поэтому $45x = 2400$ и $x = \dfrac{160}{3}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{160}{3}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-4)^2-1, & x\geq 2,\\ x, & x<2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(4;-1)$, оставленная при $x\geq 2$. Точка $(2;3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x$ при $x<2$. Его конечная точка $(2;2)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $2\leq m\leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(2;3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $2\leq m\leq 3$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 25, а основание равно 30. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h=\sqrt{25^2-15^2}=20$.
Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 30\cdot 20=300$.
По формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$ получаем $R=\dfrac{25\cdot 25\cdot 30}{4\cdot 300}=\dfrac{125}{8}$.
Ответ: $\dfrac{125}{8}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 60$, $CD = 65$, основание $BC = 20$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 65 - 20 = 45$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 60$, $AP = BC = 20$, $PD = AD - BC = 25$.
В треугольнике CPD выполняется $60^2 + 25^2 = 65^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 60.
Площадь $S = \dfrac{45 + 20}{2} \cdot 60 = 1950$.
Ответ: 1950.

Решения. Вариант 74

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

теплица — 1; сарай — 4; баня — 6; яблони — 5.
Ответ: 1465.

Задание 2

По условию площадь площадки равна 64 м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 64 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{64}{12} \right\rceil = 6$.
Ответ: 6.

Задание 3

Дом занимает прямоугольник 5×4 клетки без выреза 3×1 клетку: $5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $17 \cdot 4 = 68$ м^2.
Ответ: 68.

Задание 4

Высоты построек на плане перекрываются; горизонтальный промежуток между ними составляет 4 клетки.
Расстояние равно $4 \cdot 2 = 8$ м.
Ответ: 8.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(26500 + 33300) - (21000 + 10000) = 28800$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 8 = 12$ руб.; электричество: $8 \cdot 6 = 48$ руб.
Экономия за час равна 36 руб. Срок: $28800 : 36 = 800$ ч.
Ответ: 800.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{7}{5} - \frac{11}{5} = -\frac{4}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем -4.
Ответ: -4.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{172}$ приблизительно равно $13{,}115$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 1 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -\frac{1}{5}$.
$x = -5{,}2$. Это значение допустимо, так как числитель $-1 \neq 0$.
Ответ: $-5{,}2$.

Задание 10

Всего шаров $11 + 28 + 11 = 50$. Благоприятных исходов 28, поэтому вероятность равна $\frac{28}{50} = 0{,}56$.
Ответ: $0{,}56$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \frac{2E}{v^2} = \frac{2 \cdot 269{,}5}{7^2} = 11$ кг.
Ответ: 11.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 2$, второе — $x \leq 7$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(2; 7]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 9 \cdot 3^5 = 2187$.
Ответ: 2187.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 10^2 = 676$. Длина положительна, поэтому $BC = 26$.
Ответ: 26.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 11 \cdot 10 = 110$.
Ответ: 110.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 37t + 36 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.
Ответ: $-6;\ -1;\ 1;\ 6$.

Задание 21

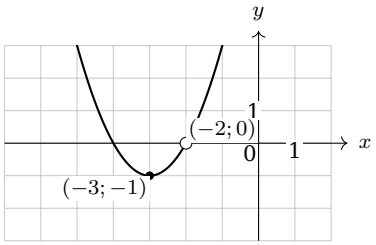
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 168 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{168}{x} - \dfrac{168}{x + 2} = 2$. Умножив на $x(x + 2)$, получаем $336 = 2x(x + 2)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 12)(x + 14) = 0$.
Корень $x = -14$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 12 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+2)(x^2+6x+8)}{x+2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq -2$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(-3; -1)$ и выколотой точкой $(-2; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 16 и 25. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $16 + 25 = 41$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 41 \cdot 16$ и $v^2 = 41 \cdot 25$.
Поэтому $u = 4\sqrt{41}$, $v = 5\sqrt{41}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 41 + 9\sqrt{41}$.
Ответ: $41 + 9\sqrt{41}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 7$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{9}{7} = \frac{9}{7}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 7 - \frac{9}{7} = \frac{40}{7}$.
Ответ: $\frac{40}{7}$.

Решения. Вариант 75

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; санузел — 1; коридор — 2; спальня — 4.
Ответ: 3124.

Задание 2

Пол кухни занимает 90 клеток, его площадь $90 \cdot 0{,}5^2 = 22{,}5$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$ м^2. Требуется $22{,}5 : 0{,}0625 = 360$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{360}{10} \right\rceil = 36$ целых упаковок.
Ответ: 36.

Задание 3

На плане помещение занимает 125 клеток.
Его площадь $125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ м^2.
Ответ: 31,25.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 99 и 44 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{99-44}{44} \cdot 100\% = 125\%$.
Ответ: 125.

Задание 5

Тариф «А»: $420 + 4 \cdot 55 = 640$ руб.
Тариф «Б»: $570 + 0 \cdot 35 = 570$ руб.
Безлимитный тариф стоит 855 руб. Наименьшая плата — 570 руб.
Ответ: 570.

Задание 6

Сумма в скобках равна 8,8.
$8{,}8 : 0{,}4 = 22$.
Ответ: 22.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{405}$ приблизительно равно $-20{,}125$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{3 \cdot 2 - 3} = 2^3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

$4x = 9 - (-13) = 22$, поэтому $x = 5{,}5$.
Ответ: 5,5.

Задание 10

На 7 делятся числа $7, 14, \ldots, 98$; их 14. Вероятность равна $\dfrac{14}{100} = 0{,}14$.
Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 1, $y = 3x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 95$: $C = \dfrac{5}{9}(95 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (63) = 35$.
Ответ: 35.

Задание 13

$121 = 11^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 11.
Множество решений: $(-\infty; -11] \cup [11; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{18} = 4 + (18 - 1) \cdot (-7) = -115$.
Ответ: -115.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 69° - 44° = 67°$.
Ответ: 67.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 30 : 2 = 15$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $36 : 2 = 18$. Вторая сторона: $18 - 9 = 9$.
Площадь равна $9 \cdot 9 = 81$.
Ответ: 81.

Задание 18

Основание занимает 5 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y = 7 - x$. Подставим во второе: $x^2 + (7 - x)^2 = 29$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2 - 7x + 10 = 0$.
Разложим на множители: $(x - 2)(x - 5) = 0$. Следовательно, $x = 2$ или $x = 5$.
При $x = 2$ первое уравнение даёт $y = 5$; при $x = 5$ получаем $y = 2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 7, сумма их квадратов равна 29.
Ответ: $(x; y) = (2; 5)$ или $(x; y) = (5; 2)$.

Задание 21

Моторная лодка прошла 72 км по течению реки и 20 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x > 2$. Скорости по течению и против течения равны $x + 2$ и $x - 2$.
Уравнение времени: $\dfrac{72}{x + 2} + \dfrac{20}{x - 2} = 4$.
После умножения на $(x + 2)(x - 2)$ и приведения получаем $4x^2 - 92x + 88 = 0$. Его корни: $x = 22$ и $x = 1$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x > 2$. Для $x = 22$ времена равны 3 ч и 1 ч, их сумма 4 ч.
Ответ: 22 км/ч.

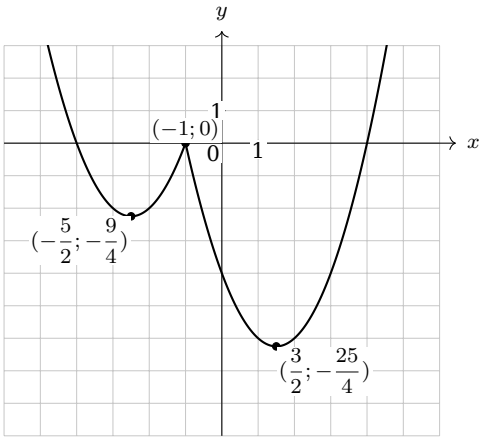
Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + x - 4|x + 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.

При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 15$, $BF = 20$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{225 + 400} = 25$.
Ответ: 25.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 17$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{17}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 17/\cos 30^\circ = \dfrac{34\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{34\sqrt{3}}{3}$.

Решения. Вариант 76

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Журавушка — 1; Васильково — 4; Иваново — 2.
Ответ: 142.

Задание 2

Путь занимает $16 + 12 = 28$ клеток.
Длина пути равна $28 \cdot 2 = 56$ км.
Ответ: 56.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 32 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ км.
Ответ: 40.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\frac{22}{25} \cdot 60 + \frac{26}{10} \cdot 60 = 208{,}8$.
Ответ: 208,8.

Задание 5

Васильково: $5 \cdot 52 + 1 \cdot 659 + 3 \cdot 894 = 3601$ руб.
Иваново: $5 \cdot 60 + 1 \cdot 680 + 3 \cdot 864 = 3572$ руб.
Камышино: $5 \cdot 67 + 1 \cdot 650 + 3 \cdot 849 = 3532$ руб.
Журавушка: $5 \cdot 57 + 1 \cdot 635 + 3 \cdot 873 = 3539$ руб.
Наименьшая стоимость — 3532 руб.
Ответ: 3532.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $8^2 = 64$. Поэтому значение выражения равно $25 - 64 = -39$.
Ответ: -39.

Задание 7

Значение числа $\frac{111}{11}$ приблизительно равно 10,091. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $17 + 2\sqrt{119} + 7 - 2\sqrt{119} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Разложение на множители: $(x)(x - 3) = 0$. Корни: 0 и 3.
Требуемый корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 13 = 487$. Вероятность равна $\dfrac{487}{500} = 0{,}974$.

Ответ: $0{,}974$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 111}{14 + 23} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $-5x > -30$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 6)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 12-го ряда число мест увеличивается 11 раз: $18 + 11 \cdot 3 = 51$.

Ответ: 51.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$, поэтому каждый равен 53°.

Ответ: 53.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Ответ: 45.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{28 + 12}{2} \cdot 10 = 200$.

Ответ: 200.

Задание 18

Основания равны 2 и 4, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{2+4}{2} \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-100}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2 - 100 = (x-10)(x+10)$.
Критические точки: -10, 2, 10. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -10 и 10 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-10]\cup(2;10]$.

Задание 21

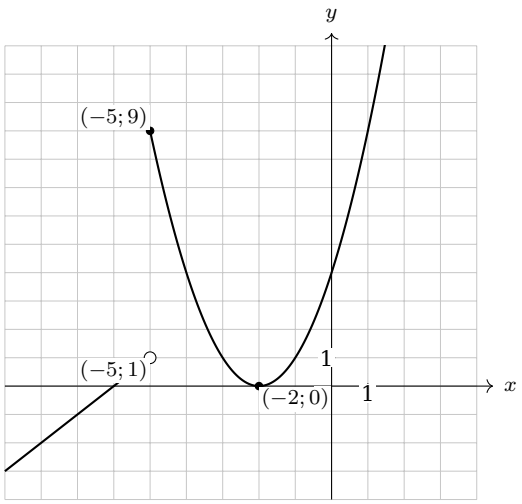
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 12 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 18 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x + 18$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+18)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+18} = \dfrac{1}{12}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+18) = 12(2x+18)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 18$ и $x = -12$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{12}$, поэтому время совместной работы равно 12 ч.
Ответ: 18 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+2)^2+0, & x\geq -5,\\ x+6, & x<-5.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2;0)$, оставленная при $x\geq -5$. Точка $(-5;9)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+6$ при $x<-5$. Его конечная точка $(-5;1)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $1\leq m\leq 9$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>9$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 9 включена, поскольку точка $(-5;9)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $1\leq m\leq 9$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=9$, $CK=18$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=9$. Сторона $BC=BK+CK=27$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(9+27)=72$.
Ответ: 72.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM=AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD=MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD=AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM=CD/2=AB/2$.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 4$, $BC = 8$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 8$ и $BH = AC = 4$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 4|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-4)^2 + 8^2$.
После раскрытия скобок получаем $8R = 80$. Поэтому $R = 10$.
Ответ: 10.

Решения. Вариант 77

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 3; Озёрное — 4; Берёзовка — 1.
Ответ: 341.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $21 + 9 + 40 = 70$ км.
Ответ: 70.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 9 и 40 км.
Её длина $\sqrt{9^2 + 40^2} = 41$ км.
Ответ: 41.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 21 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 41 км.
Время: $\dfrac{21}{80} \cdot 60 + \dfrac{41}{50} \cdot 60 = 64{,}95$ мин.
Ответ: 64,95.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{70 \cdot 8}{100} \cdot 73 = 408{,}8$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{50 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 73 = 346{,}75$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{21 \cdot 8 + 41 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 73 = 406{,}975$ руб.

Наименьшая стоимость — $346{,}75$ руб.
Ответ: 346,75.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{7}{5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{4}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем 4.
Ответ: 4.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{302}$ приблизительно равно $17{,}378$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$10 + 1 = 11$.
Ответ: 11.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -\dfrac{11}{4}$.
$x = -7{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-22 \neq 0$.
Ответ: $-7{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $24 + 5 + 11 = 40$. Благоприятных исходов 5, поэтому вероятность равна $\dfrac{5}{40} = 0{,}125$.
Ответ: $0{,}125$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{16{,}8 \cdot 28}{28 - 16{,}8} = 42$ Ом.
Ответ: 42.

Задание 13

Нули множителей: -11 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-11; 1)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 5 \cdot 3^3 = 135$.
Ответ: 135.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. Длина положительна, поэтому $BC = 13$.
Ответ: 13.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{22 \cdot 10}{2} = 110$.

Ответ: 110.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 5 = 35$.

Ответ: 35.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.

Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.

Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.

Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 64x - 320 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x + 5) - 64(x + 5) = 0$.

Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x + 5)(x^2 - 64) = (x + 5)(x - 8)(x + 8) = 0$.

Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-8;\ -5;\ 8$.

Ответ: $-8;\ -5;\ 8$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 11 км/ч, второго 16 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками $102{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $11(t - \dfrac{1}{2}) + 16t = \dfrac{205}{2}$. Отсюда $27t = 108$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $16 \cdot 4 = 64$ км. Время движения первого $\dfrac{7}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.

Ответ: 64 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+4x+3)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

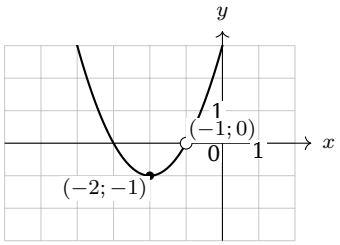
Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$.

Строим параболу с вершиной $(-2; -1)$ и выколотой точкой $(-1; 0)$.

При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 6$, $AC = 18$, $NC = 19$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 19$. По подобию $\dfrac{x}{x+19} = \dfrac{6}{18}$.

Отсюда $18x = 6(x+19)$, то есть $12x = 114$. Получаем $BN = \dfrac{19}{2}$.

Ответ: $\dfrac{19}{2}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.

Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.

Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 65$, $BC = 50$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{250}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 65 - \dfrac{250}{13} = \dfrac{595}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 50 \cdot \dfrac{\frac{595}{13}}{65} = \dfrac{5950}{169}$.

Ответ: $\dfrac{5950}{169}$.

Решения. Вариант 78

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м³ — печь № 2, 14 м³ — печь № 3, 8 м³ — печь № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

$V = 3{,}9 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}1 = 19{,}656$ м³.
Ответ: 19,656.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $30 : 2 = 15$ см и 36 см.
$R = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39$ см.
Ответ: 39.

Задание 4

После скидки остаётся 88% цены. Получаем $33400 \cdot \dfrac{88}{100} = 29392$ руб.
Ответ: 29392.

Задание 5

Объём парной равен $19{,}656$ м³. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $33400 + 1150 = 34550$ руб.
Печь № 3: $27600 + 1150 + 5850 = 34600$ руб.
Наименьшая сумма — 34550 руб.
Ответ: 34550.

Задание 6

Сумма в скобках равна $4{,}7$.
$4{,}7 : 0{,}2 = 23{,}5$.
Ответ: 23,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{58}$ приблизительно равно $-7{,}616$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{2 \cdot 2 - 3} = 6^1 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

$8x = -124 - (-12) = -112$, поэтому $x = -14$.
Ответ: -14.

Задание 10

На 4 делятся числа $4, 8, \ldots, 100$; их 25. Вероятность равна $\dfrac{25}{100} = 0{,}25$.

Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = -3x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 760{,}5}{13^2} = 9$ кг.

Ответ: 9.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -8$, второе — $x \le -1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-8; -1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_6 = 11 + (6-1) \cdot (-5) = -14$.
Ответ: -14.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 57° - 35° = 88°$.
Ответ: 88.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{32^2 + 60^2} = 68$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 68 : 2 = 34$.
Ответ: 34.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 17 \cdot 12 = 204$.
Ответ: 204.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 7, поэтому площадь равна $8 \cdot 7 = 56$.
Ответ: 56.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{25}{x-60}+\dfrac{25}{x+60}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 60$ и $x\neq -60$.
Умножим уравнение на $(x-60)(x+60)$: $25(x+60)+25(x-60)=x^2-3600$.
Получим $x^2-50x-3600=0$, или $(x-25)^2=4225=65^2$.
Поэтому $x=25-65=-40$ или $x=25+65=90$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-40;\ 90$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80-x$ кг, причём $0<x<80$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{25}{100}x+\dfrac{70}{100}(80-x)=\dfrac{40}{100}\cdot 80$.
Умножим на 100: $25x+5600-70x=3200$. Поэтому $45x=2400$ и $x=\dfrac{160}{3}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{160}{3}$ кг.

Задание 22

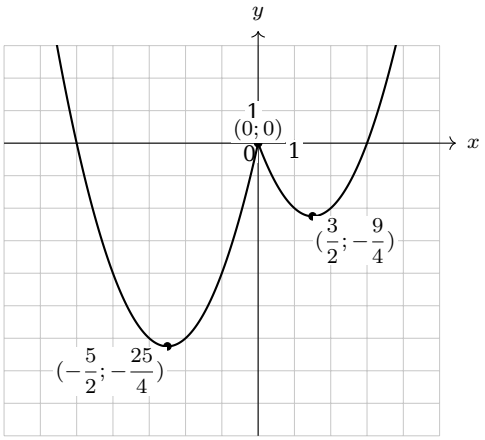
Постройте график функции $y = x^2 + x - 4|x|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t + 0$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.

При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 65, а основание равно 50. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 60 = 1500$.

По формуле $R = \frac{abc}{4S}$ получаем $R = \frac{65 \cdot 65 \cdot 50}{4 \cdot 1500} = \frac{845}{24}$.

Ответ: $\frac{845}{24}$.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.

Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.

Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 40$, $CD = 85$, основание $BC = 5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 85 - 5 = 80$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 40$, $AP = BC = 5$, $PD = AD - BC = 75$.
В треугольнике CPD выполняется $40^2 + 75^2 = 85^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 40.
Площадь $S = \dfrac{80 + 5}{2} \cdot 40 = 1700$.
Ответ: 1700.

Решения. Вариант 79

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 9.
Ответ: 9.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{10+12+14+8}{4}=11$ ГБ.
Ответ: 11.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 200 минут и 0 ГБ.
Плата: $540+200\cdot 2+0\cdot 60=940$ руб.
Ответ: 940.

Задание 5

За месяц № 7 использовано 250 минут и 12 ГБ.
«Основной»: $540+0\cdot 2+0\cdot 60=540$ руб.
«Расширенный»: $785+0\cdot 2+0\cdot 50=785$ руб.
Наименьшая плата — 540 руб.
Ответ: 540.

Задание 6

$(-10)^2=100$, $10^2=100$. Поэтому значение выражения равно $100-100=0$.
Ответ: 0.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{158}{11}$ приблизительно равно $14{,}364$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $11+2\sqrt{165}+15-2\sqrt{165}=26$.
Ответ: 26.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+12)(x-2)=0$. Корни: -12 и 2.
Требуемый корень равен 2.
Ответ: 2.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 3 = 497$. Вероятность равна $\dfrac{497}{500} = 0{,}994$.

Ответ: $0{,}994$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 132.

Задание 12

Подставляем $F = 23$: $C = \dfrac{5}{9}(23 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-9) = -5$.

Ответ: -5.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых больше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 18-го ряда число мест увеличивается 17 раз: $25 + 17 \cdot 5 = 110$.
Ответ: 110.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 84^\circ = 96^\circ$, поэтому каждый равен 48°.
Ответ: 48.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $34 : 2 = 17$. Вторая сторона: $17 - 5 = 12$.
Площадь равна $5 \cdot 12 = 60$.
Ответ: 60.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 5 и 12.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 верно. Это формула площади параллелограмма.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 53x^2 + 196 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 53t + 196 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 49) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 49$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 49$ — $x = \pm 7$.
Ответ: $-7;\ -2;\ 2;\ 7$.

Задание 21

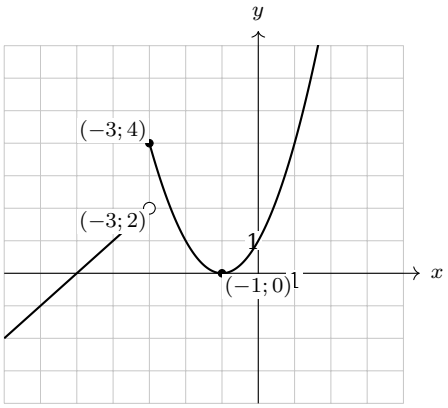
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 336 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{336}{x} - \dfrac{336}{x+3} = 2$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $1008 = 2x(x+3)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 21)(x + 24) = 0$.
Корень $x = -24$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 21 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 21 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2+0, & x\geq -3,\\ x+5, & x<-3.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;0)$, оставленная при $x\geq -3$. Точка $(-3;4)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+5$ при $x<-3$. Его конечная точка $(-3;2)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $2\leq m\leq 4$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>4$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 4 включена, поскольку точка $(-3;4)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $2\leq m\leq 4$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 50 и 50. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $50+50=100$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=100\cdot 50$ и $v^2=100\cdot 50$.
Поэтому $u=50\sqrt{2}$, $v=50\sqrt{2}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=100+100\sqrt{2}$.
Ответ: $100+100\sqrt{2}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO=\angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 4$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 16$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{16}{8} = 2$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - 2 = 6$.
Ответ: 6.

Решения. Вариант 80

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А2 — размеры № 3, А5 — размеры № 1, А6 — размеры № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $4 \cdot 2^4 = 64$ листов.
Ответ: 64.

Задание 3

Размеры листа равны 21 см и $29{,}7$ см.
Площадь $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ см^2.
Ответ: 623,7.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 120 \cdot 400}{1000} = 2{,}99376$ кг.
После округления получаем 3 кг.
Ответ: 3.

Задание 5

Всего нужно $935 \cdot 2 = 1870$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1870}{400} \right\rceil = 5$.
Стоимость: $5 \cdot 460 = 2300$ руб.
Ответ: 2300.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{10} - 2 = \dfrac{1}{10}$.
Умножаем на 5 и получаем $0{,}5$.
Ответ: 0,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{446}$ приблизительно равно $21{,}119$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$16 + 2 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -12$. Из равенства получаем $x - (-12) = 12$.
$x = 0$. Это значение допустимо, так как числитель $24 \neq 0$.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего шаров $30+2+8 = 40$. Благоприятных исходов 2, поэтому вероятность равна $\dfrac{2}{40} = 0{,}05$.
Ответ: $0{,}05$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 42}{5 + 23} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -40$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 8]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 4 \cdot 3^6 = 2916$.
Ответ: 2916.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Длина положительна, поэтому $BC = 17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 76^\circ : 2 = 38^\circ$.
Ответ: 38.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{21 + 6}{2} \cdot 6 = 81$.
Ответ: 81.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 5 клеток. Площадь равна $\dfrac{8\cdot 5}{2}=20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=9,\\ x^2+y^2=45. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=9-x$. Подставим во второе: $x^2+(9-x)^2=45$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-9x+18=0$.
Разложим на множители: $(x-3)(x-6)=0$. Следовательно, $x=3$ или $x=6$.
При $x=3$ первое уравнение даёт $y=6$; при $x=6$ получаем $y=3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 9, сумма их квадратов равна 45.
Ответ: $(x;y)=(3;6)$ или $(x;y)=(6;3)$.

Задание 21

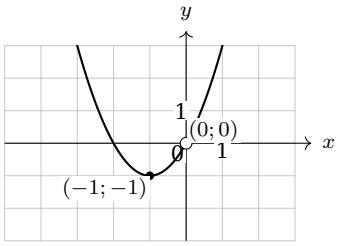
Моторная лодка прошла 81 км по течению реки и 42 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{81}{x+3}+\dfrac{42}{x-3}=5$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $5x^2-123x+72=0$. Его корни: $x=24$ и $x=\dfrac{3}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=24$ времена равны 3 ч и 2 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+2x)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2+2x = (x+1)^2-1$.
Строим параболу с вершиной $(-1;-1)$ и выколотой точкой $(0;0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 25$, $BF = 60$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{625 + 3600} = 65$.
Ответ: 65.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 18$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 9$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 18/\cos 45^\circ = 18\sqrt{2}$.
Ответ: $18\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 81

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 195, 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 165 \cdot \dfrac{60}{100} = 99$ мм.
Ответ: 99.

Задание 3

Диаметр диска: $13 \cdot 25{,}4 = 330{,}2$ мм.
Высота боковины: $195 \cdot \dfrac{65}{100} = 126{,}75$ мм.
$D = 330{,}2 + 2 \cdot 126{,}75 = 583{,}7$ мм.
Ответ: 583,7.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$195 \cdot \dfrac{60}{100} - 205 \cdot \dfrac{55}{100} = 4{,}25$ мм.
Ответ: 4,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $14 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 195 \cdot \dfrac{60}{100} = 589{,}6$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{589{,}6 - 583{,}7}{583{,}7} \cdot 100\% \approx 1\%$.
Ответ: 1.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}9$.
$11{,}9 : 0{,}2 = 59{,}5$.
Ответ: 59,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{130}$ приблизительно равно $-11{,}402$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{4 \cdot 2 - 5} = 6^3 = 216$.
Ответ: 216.

Задание 9

$5x = 1{,}5 - (-11) = 12{,}5$, поэтому $x = 2{,}5$.
Ответ: $2{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 36$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{40} = 0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{12 \cdot 20}{20 - 12} = 30$ Ом.
Ответ: 30.

Задание 13

Нули множителей: -9 и -1. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-9; -1]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{25} = -4 + (25 - 1) \cdot (7) = 164$.
Ответ: 164.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 30° - 42° = 108°$.
Ответ: 108.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{16 \cdot 16}{2} = 128$.
Ответ: 128.

Задание 18

Основания равны 5 и 6, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{5+6}{2} \cdot 4 = 22$.

Ответ: 22.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-16}{x-3} \leq 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 3$. Разложим числитель: $x^2-16 = (x-4)(x+4)$.
Критические точки: -4, 3, 4. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -4 и 4 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-4] \cup (3;4]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $9{,}6$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 36 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+36$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+36)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+36} = \dfrac{5}{48}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+36) = \dfrac{48}{5}(2x+36)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 12$ и $x = -\dfrac{144}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

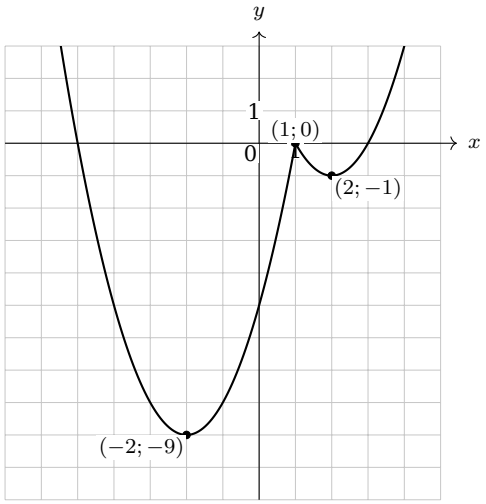
Проверка: $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{48} = \dfrac{5}{48}$, поэтому время совместной работы равно $9{,}6$ ч.

Ответ: 12 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 1 - 4|x - 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 6t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-3; -9)$ и $(1; -1)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -9$ пересечений нет; при $m = -9$ одно; при $-9 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 3$, $CK = 19$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 3$. Сторона $BC = BK + CK = 22$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(3 + 22) = 50$.
Ответ: 50.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 5$, $BC = 10$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 10$ и $BH = AC = 5$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 5|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-5)^2 + 10^2$.

После раскрытия скобок получаем $10R = 125$. Поэтому $R = \dfrac{25}{2}$.

Ответ: $\dfrac{25}{2}$.

Решения. Вариант 82

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

теплица — 1; яблони — 5; баня — 6; сарай — 4.
Ответ: 1564.

Задание 2

Дорожки занимают $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой получается $26+64=90$ м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 90 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{90}{4} \right\rceil = 23$.
Ответ: 23.

Задание 3

Сарай занимает $2 \cdot 3 = 6$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $6 \cdot 4 = 24$ м^2.
Ответ: 24.

Задание 4

Горизонтальные проекции построек перекрываются; вертикальный промежуток составляет 2 клетки.
Расстояние равно $2 \cdot 2 = 4$ м.
Ответ: 4.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(28000 + 19200) - (23000 + 11000) = 13200$ руб.
Газ за час: $1{,}2 \cdot 10 = 12$ руб.; электричество: $6 \cdot 4{,}5 = 27$ руб.
Экономия за час равна 15 руб. Срок: $13200 : 15 = 880$ ч.
Ответ: 880.

Задание 6

$(-8)^2 = 64$, $6^2 = 36$. Поэтому значение выражения равно $64 - 36 = 28$.
Ответ: 28.

Задание 7

Значение числа $\frac{236}{13}$ приблизительно равно $18{,}154$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $7 + 2\sqrt{77} + 11 - 2\sqrt{77} = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+1)(x) = 0$. Корни: -1 и 0.
Требуемый корень равен -1.
Ответ: -1.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 8 = 492$. Вероятность равна $\dfrac{492}{500} = 0{,}984$.

Ответ: $0{,}984$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 929{,}5}{13^2} = 11$ кг.

Ответ: 11.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -4$, второе — $x \le 5$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-4; 5]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 10-го ряда число мест увеличивается 9 раз: $12 + 9 \cdot 3 = 39$.
Ответ: 39.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$, поэтому каждый равен 51°.
Ответ: 51.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 34 : 2 = 17$.
Ответ: 17.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 24 \cdot 11 = 264$.
Ответ: 264.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 6 = 42$.
Ответ: 42.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 6x^2 - 81x - 486 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+6) - 81(x+6) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+6)(x^2-81) = (x+6)(x-9)(x+9) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-9;\ -6;\ 9$.
Ответ: $-9;\ -6;\ 9$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 12 км/ч, второго 12 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками 87 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

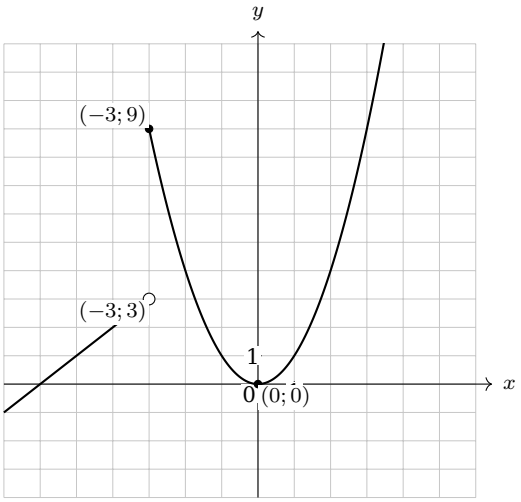
Сумма путей: $12(t - \frac{3}{4}) + 12t = 87$. Отсюда $24t = 96$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $12 \cdot 4 = 48$ км. Время движения первого $\frac{13}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 48 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x)^2+0, & x\geq -3,\\ x+6, & x<-3.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0;0)$, оставленная при $x\geq -3$. Точка $(-3;9)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+6$ при $x<-3$. Его конечная точка $(-3;3)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<3$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $3\leq m\leq 9$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>9$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 9 включена, поскольку точка $(-3;9)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $3\leq m\leq 9$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=7$, $AC=28$, $NC=20$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+20$. По подобию $\dfrac{x}{x+20}=\dfrac{7}{28}$.

Отсюда $28x=7(x+20)$, то есть $21x=140$. Получаем $BN=\dfrac{20}{3}$.

Ответ: $\dfrac{20}{3}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 85$, $BC = 80$.
Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{640}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 85 - \dfrac{640}{17} = \dfrac{805}{17}$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны.

Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 80 \cdot \dfrac{\frac{805}{17}}{85} = \dfrac{12880}{289}$.

Ответ: $\dfrac{12880}{289}$.

Решения. Вариант 83

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

спальня — 4; коридор — 2; кладовая — 3; кухня — 7.
Ответ: 4237.

Задание 2

Пол коридора занимает 125 клеток, его площадь $125 \cdot 0{,}4^2 = 20$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ м^2. Требуется $20 : 0{,}04 = 500$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{500}{12} \right\rceil = 42$ целых упаковок.
Ответ: 42.

Задание 3

На плане помещение занимает 156 клеток.
Его площадь $156 \cdot 0{,}4^2 = 24{,}96$ м^2.
Ответ: 24,96.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 99 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{99-30}{30} \cdot 100\% = 230\%$.
Ответ: 230.

Задание 5

Тариф «А»: $430 + 12 \cdot 60 = 1150$ руб.
Тариф «Б»: $580 + 2 \cdot 30 = 640$ руб.
Безлимитный тариф стоит 870 руб. Наименьшая плата — 640 руб.
Ответ: 640.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{17}{4} - \dfrac{6}{5} = \dfrac{61}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $6{,}1$.
Ответ: 6,1.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{70}$ приблизительно равно $8{,}367$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$13 + 3 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 4$. Из равенства получаем $x-(4)=-\frac{7}{4}$.
$x = 2{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $-7 \neq 0$.
Ответ: $2{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $30+6+4=40$. Благоприятных исходов 6, поэтому вероятность равна $\frac{6}{40}=0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x=1$. Ему соответствует формула 1, $y=\frac{1}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2-1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y=2x+2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F=5$: $C=\frac{5}{9}(5-32)=\frac{5}{9}\cdot(-27)=-15$.
Ответ: -15.

Задание 13

$144=12^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 12.
Множество решений: $(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n=b_1q^{n-1}$, поэтому $b_6=5\cdot3^5=1215$.
Ответ: 1215.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2+AC^2=16^2+12^2=400$. Длина положительна, поэтому $BC=20$.
Ответ: 20.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB=24:2=12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH=\sqrt{13^2-12^2}=5$.
Ответ: 5.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52:2=26$. Вторая сторона: $26-10=16$.
Площадь равна $10\cdot16=160$.
Ответ: 160.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 3, поэтому площадь равна $8 \cdot 3 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{40}{x-75} + \dfrac{40}{x+75} = 1$.
Область допустимых значений: $x \neq 75$ и $x \neq -75$.
Умножим уравнение на $(x-75)(x+75)$: $40(x+75) + 40(x-75) = x^2 - 5625$.
Получим $x^2 - 80x - 5625 = 0$, или $(x-40)^2 = 7225 = 85^2$.
Поэтому $x = 40 - 85 = -45$ или $x = 40 + 85 = 125$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-45;\ 125$.

Задание 21

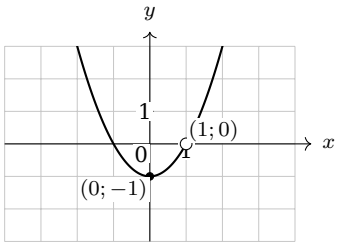
Имеются два сплава с содержанием меди 30% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80 - x$ кг, причём $0 < x < 80$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{30}{100}x + \dfrac{75}{100}(80 - x) = \dfrac{45}{100} \cdot 80$.
Умножим на 100: $30x + 6000 - 75x = 3600$. Поэтому $45x = 2400$ и $x = \dfrac{160}{3}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{160}{3}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2-1)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(0; -1)$ и выколотой точкой $(1; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 85, а основание равно 80. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{85^2 - 40^2} = 75$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 80 \cdot 75 = 3000$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{85 \cdot 85 \cdot 80}{4 \cdot 3000} = \dfrac{289}{6}$.
Ответ: $\dfrac{289}{6}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 75$, $CD = 85$, основание $BC = 22{,}5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 85 - \dfrac{45}{2} = \dfrac{125}{2}$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 75$, $AP = BC = \dfrac{45}{2}$, $PD = AD - BC = 40$.

В треугольнике CPD выполняется $75^2 + 40^2 = 85^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 75.

Площадь $S = \dfrac{\dfrac{125}{2} + \dfrac{45}{2}}{2} \cdot 75 = \dfrac{6375}{2}$.

Ответ: $\dfrac{6375}{2}$.

Решения. Вариант 84

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Иваново — 2; Васильково — 4; Камышино — 3.
Ответ: 243.

Задание 2

Путь занимает 11 клеток.
Длина пути равна $11 \cdot 1 = 11$ км.
Ответ: 11.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 5 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{25} \cdot 60 + \frac{13}{15} \cdot 60 = 78{,}4$.
Ответ: 78,4.

Задание 5

Васильково: $2 \cdot 61 + 1{,}5 \cdot 685 + 3 \cdot 871 = 3762{,}5$ руб.
Иваново: $2 \cdot 68 + 1{,}5 \cdot 655 + 3 \cdot 856 = 3686{,}5$ руб.
Камышино: $2 \cdot 58 + 1{,}5 \cdot 640 + 3 \cdot 880 = 3716$ руб.
Журавушка: $2 \cdot 53 + 1{,}5 \cdot 664 + 3 \cdot 901 = 3805$ руб.
Наименьшая стоимость — 3686,5 руб.
Ответ: 3686,5.

Задание 6

Сумма в скобках равна 8,3.
$8{,}3 : 0{,}8 = 10{,}375$.
Ответ: 10,375.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{252}$ приблизительно равно $-15{,}875$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{2 \cdot 2 - 1} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$8x = -5 - (-5) = 0$, поэтому $x = 0$.
Ответ: 0.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 18$; их 2. Вероятность равна $\dfrac{2}{20} = 0{,}1$.
Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -x$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 135}{5 + 22} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $-5x > -45$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 9)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{10} = 20 + (10-1) \cdot (5) = 65$.
Ответ: 65.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 68° - 48° = 64°$.
Ответ: 64.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 110° : 2 = 55°$.
Ответ: 55.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{24 + 4}{2} \cdot 10 = 140$.
Ответ: 140.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 4 и 3. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 73t + 576 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 64) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 64$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 64$ — $x = \pm 8$.
Ответ: $-8;\ -3;\ 3;\ 8$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 864 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{864}{x} - \dfrac{864}{x+4} = 3$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $3456 = 3x(x+4)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 32)(x + 36) = 0$.
Корень $x = -36$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 32 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 32 км/ч.

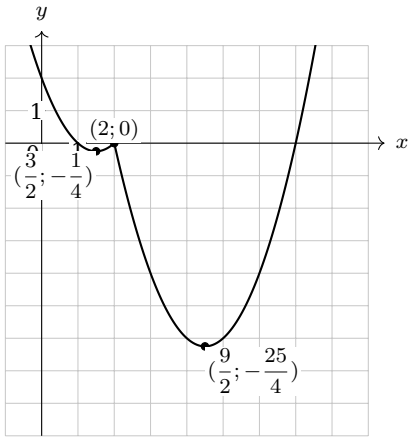
Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 8 - 3|x - 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.

При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{1}{4}$ два; при $m = -\frac{1}{4}$ три.

При $-\frac{1}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{1}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 36 и 25. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $36 + 25 = 61$. Обозначим катеты u и v.

Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 61 \cdot 36$ и $v^2 = 61 \cdot 25$.

Поэтому $u = 6\sqrt{61}$, $v = 5\sqrt{61}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 61 + 11\sqrt{61}$.

Ответ: $61 + 11\sqrt{61}$.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 9$, $MD = 5$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{9} = \dfrac{25}{9}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 9 - \dfrac{25}{9} = \dfrac{56}{9}$.
Ответ: $\dfrac{56}{9}$.

Решения. Вариант 85

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Озёрное — 2; Луговое — 3; Сосновка — 4.
Ответ: 234.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $12 + 15 + 36 = 63$ км.
Ответ: 63.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 27 и 36 км.
Её длина $\sqrt{27^2 + 36^2} = 45$ км.
Ответ: 45.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 12 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 39 км.
Время: $\dfrac{12}{60} \cdot 60 + \dfrac{39}{30} \cdot 60 = 90$ мин.
Ответ: 90.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{63 \cdot 8{,}5}{100} \cdot 75 = 401{,}625$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{45 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 75 = 354{,}375$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{12 \cdot 8{,}5 + 39 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 75 = 383{,}625$ руб.

Наименьшая стоимость — $354{,}375$ руб.
Ответ: 354,375.

Задание 6

$(-12)^2 = 144$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $144 - 49 = 95$.
Ответ: 95.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{56}{11}$ приблизительно равно $5{,}091$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{45} + 3 - 2\sqrt{45} = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 9)(x - 1) = 0$. Корни: -9 и 1.
Требуемый корень равен 1.
Ответ: 1.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 24 = 476$. Вероятность равна $\dfrac{476}{500} = 0{,}952$.

Ответ: $0{,}952$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{18 \cdot 30}{30 - 18} = 45$ Ом.

Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -6 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-6; 1)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 8-го ряда число мест увеличивается 7 раз: $25 + 7 \cdot 4 = 53$.
Ответ: 53.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, поэтому каждый равен 60°.
Ответ: 60.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{22 \cdot 10}{2} = 110$.

Ответ: 110.

Задание 18

Основание занимает 7 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{7 \cdot 4}{2} = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-2, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-2-x$. Подставим во второе: $x^2+(-2-x)^2=10$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+2x-3=0$.
Разложим на множители: $(x+3)(x-1)=0$. Следовательно, $x=-3$ или $x=1$.
При $x=-3$ первое уравнение даёт $y=1$; при $x=1$ получаем $y=-3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -2, сумма их квадратов равна 10.
Ответ: $(x;y)=(-3;1)$ или $(x;y)=(1;-3)$.

Задание 21

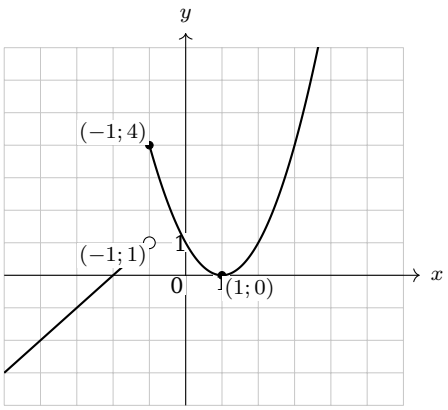
Моторная лодка прошла 64 км по течению реки и 24 км против течения, затратив на весь путь 7 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>4$. Скорости по течению и против течения равны $x+4$ и $x-4$.
Уравнение времени: $\dfrac{64}{x+4}+\dfrac{24}{x-4}=7$.
После умножения на $(x+4)(x-4)$ и приведения получаем $7x^2-88x+48=0$. Его корни: $x=12$ и $x=\dfrac{4}{7}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>4$. Для $x=12$ времена равны 4 ч и 3 ч, их сумма 7 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-1)^2+0, & x\geq -1,\\ x+2, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(1;0)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;4)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+2$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;1)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $1\leq m\leq 4$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>4$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 4 включена, поскольку точка $(-1;4)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $1\leq m\leq 4$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=40$, $BF=75$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{1600+5625}=85$.
Ответ: 85.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 19$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{19}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 19/\cos 60^\circ = 38$.

Ответ: 38.

Решения. Вариант 86

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м^3 — печь № 3, 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

$V = 4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}1 = 21$ м^3.
Ответ: 21.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $40 : 2 = 20$ см и 48 см.
$R = \sqrt{20^2 + 48^2} = 52$ см.
Ответ: 52.

Задание 4

После скидки остаётся 85% цены. Получаем $34000 \cdot \dfrac{85}{100} = 28900$ руб.
Ответ: 28900.

Задание 5

Объём парной равен 21 м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $34000 + 1200 = 35200$ руб.
Печь № 3: $28000 + 1200 + 6000 = 35200$ руб.
Наименьшая сумма — 35200 руб.
Ответ: 35200.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{6}{5} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем 2.
Ответ: 2.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{153}$ приблизительно равно $12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$16 + 3 = 19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -\dfrac{27}{8}$.
$x = -8{,}375$. Это значение допустимо, так как числитель $-27 \neq 0$.
Ответ: $-8{,}375$.

Задание 10

Всего шаров $3 + 16 + 31 = 50$. Благоприятных исходов 16, поэтому вероятность равна $\dfrac{16}{50} = 0{,}32$.
Ответ: $0{,}32$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = x + 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 27}{3^2} = 6$ кг.
Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 1$, второе — $x \le 6$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(1; 6]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{20^2 + 48^2} = 52$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 52 : 2 = 26$.
Ответ: 26.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 8 \cdot 13 = 104$.
Ответ: 104.

Задание 18

Основания равны 2 и 5, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{2 + 5}{2} \cdot 5 = 17{,}5$.
Ответ: $17{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 2 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-25}{x-3}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 3$. Разложим числитель: $x^2-25=(x-5)(x+5)$.
Критические точки: -5, 3, 5. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -5 и 5 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-5]\cup(3;5]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $8{,}4$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 7 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+7$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+7)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+7}=\dfrac{5}{42}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+7)=\dfrac{42}{5}(2x+7)$.

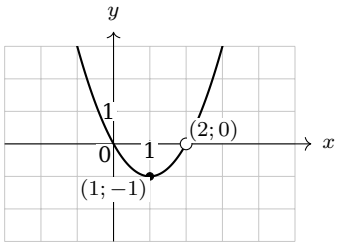
Корни этого квадратного уравнения: $x=14$ и $x=-\dfrac{21}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

Проверка: $\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{21}=\dfrac{5}{42}$, поэтому время совместной работы равно $8{,}4$ ч.
Ответ: 14 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2-2x)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(1;-1)$ и выколотой точкой $(2;0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 4$, $CK = 20$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 4$. Сторона $BC = BK + CK = 24$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(4 + 24) = 56$.
Ответ: 56.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, $BC = 9$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 9$ и $BH = AC = 6$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 6|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-6)^2 + 9^2$.

После раскрытия скобок получаем $12R = 117$. Поэтому $R = \dfrac{39}{4}$.

Ответ: $\dfrac{39}{4}$.

Решения. Вариант 87

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 6.
Ответ: 6.

Задание 2

Лимит равен 350 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 2, 7, 9, 10, 12.
Всего таких месяцев — 6.
Ответ: 6.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{16+18+12+20}{4} = 16{,}5$ ГБ.
Ответ: $16{,}5$.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 12 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 2 ГБ.
Плата: $550 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 65 = 680$ руб.
Ответ: 680.

Задание 5

За месяц № 2 использовано 600 минут и 16 ГБ.
«Основной»: $550 + 250 \cdot 2 + 6 \cdot 65 = 1440$ руб.
«Расширенный»: $800 + 100 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 1000$ руб.
Наименьшая плата — 1000 руб.
Ответ: 1000.

Задание 6

Сумма в скобках равна $10{,}1$.
$10{,}1 : 0{,}8 = 12{,}625$.
Ответ: $12{,}625$.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{376}$ приблизительно равно $-19{,}391$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3\cdot 2-3} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$4x = 2 - (22) = -20$, поэтому $x = -5$.
Ответ: -5.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 18$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{20} = 0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -x$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 113$: $C = \dfrac{5}{9}(113 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (81) = 45$.
Ответ: 45.

Задание 13

$144 = 12^2$. Требуются числа, модуль которых больше 12.
Множество решений: $(-\infty; -12) \cup (12; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{12} = -19 + (12 - 1) \cdot (-7) = -96$.
Ответ: -96.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 56° - 46° = 78°$.
Ответ: 78.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 72 : 2 = 36$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $26 : 2 = 13$. Вторая сторона: $13 - 8 = 5$.
Площадь равна $8 \cdot 5 = 40$.
Ответ: 40.

Задание 18

Основание равно 6, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 6 \cdot 3 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 36x - 72 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 36(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-36) = (x+2)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -2;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -2;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 13 км/ч, второго 15 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $108{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

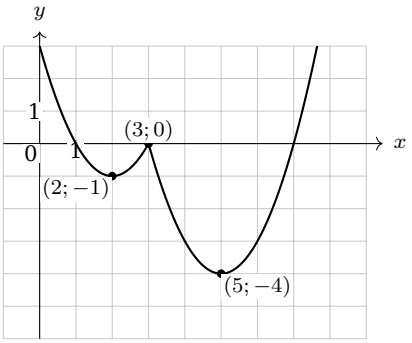
Сумма путей: $13(t - \frac{1}{4}) + 15t = \frac{435}{4}$. Отсюда $28t = 112$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $15 \cdot 4 = 60$ км. Время движения первого $\frac{15}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 60 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 7x + 12 - 3|x - 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 4t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; -1)$ и $(2; -4)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -4$ пересечений нет; при $m = -4$ одно; при $-4 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 3$, $AC = 6$, $NC = 21$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 21$. По подобию $\dfrac{x}{x + 21} = \dfrac{3}{6}$.
Отсюда $6x = 3(x + 21)$, то есть $3x = 63$. Получаем $BN = 21$.
Ответ: 21.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 30$, $BC = 36$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{108}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 30 - \dfrac{108}{5} = \dfrac{42}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 36 \cdot \dfrac{\frac{42}{5}}{30} = \dfrac{252}{25}$.

Ответ: $\dfrac{252}{25}$.

Решения. Вариант 88

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 2, А4 — размеры № 3, А2 — размеры № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

При переходе от А1 к А5 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $4 \cdot 2^4 = 64$ листов.
Ответ: 64.

Задание 3

Размеры листа равны $14{,}8$ см и 21 см.
Площадь $14{,}8 \cdot 21 = 310{,}8$ см^2.
Ответ: 310,8.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 70 \cdot 500}{1000} = 2{,}18295$ кг.
После округления получаем $2{,}2$ кг.
Ответ: 2,2.

Задание 5

Всего нужно $970 \cdot 3 = 2910$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2910}{500} \right\rceil = 6$.
Стоимость: $6 \cdot 480 = 2880$ руб.
Ответ: 2880.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $10^2 = 100$. Поэтому значение выражения равно $25 - 100 = -75$.
Ответ: -75.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{122}{13}$ приблизительно равно $9{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $2 + 2\sqrt{38} + 19 - 2\sqrt{38} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+2)(x-2) = 0$. Корни: -2 и 2.
Требуемый корень равен -2.
Ответ: -2.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 14 = 486$. Вероятность равна $\dfrac{486}{500} = 0{,}972$.

Ответ: $0{,}972$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.

Ответ: 321.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a + b} = \dfrac{2 \cdot 175}{9 + 26} = 10$.

Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -50$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 10]$.

Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 20-го ряда число мест увеличивается 19 раз: $32 + 19 \cdot 5 = 127$.

Ответ: 127.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$, поэтому каждый равен 33°.

Ответ: 33.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 144^\circ : 2 = 72^\circ$.

Ответ: 72.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{25 + 9}{2} \cdot 8 = 136$.

Ответ: 136.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 2, поэтому площадь равна $8 \cdot 2 = 16$.

Ответ: 16.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Это формула площади параллелограмма.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{18}{x-24}+\frac{18}{x+24}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 24$ и $x \neq -24$.
Умножим уравнение на $(x-24)(x+24)$: $18(x+24)+18(x-24)=x^2-576$.
Получим $x^2-36x-576=0$, или $(x-18)^2=900=30^2$.
Поэтому $x=18-30=-12$ или $x=18+30=48$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-12;\ 48$.

Задание 21

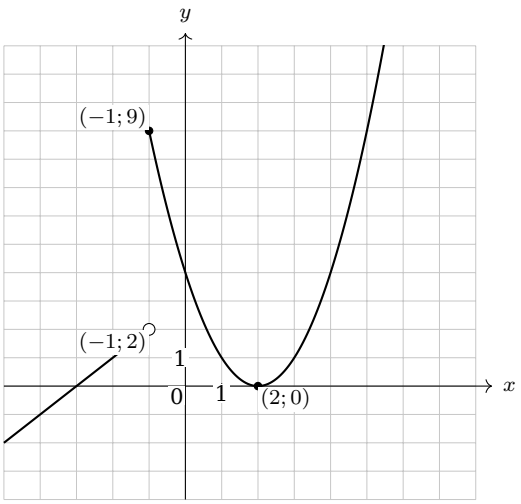
Имеются два сплава с содержанием меди 10% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80-x$ кг, причём $0<x<80$.
Количество меди сохраняется: $\frac{10}{100}x+\frac{65}{100}(80-x)=\frac{50}{100}\cdot 80$.
Умножим на 100: $10x+5200-65x=4000$. Поэтому $55x=1200$ и $x=\frac{240}{11}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{240}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2+0, & x\geq -1,\\ x+3, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;0)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;9)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+3$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;2)$ выколота.
При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $2\leq m\leq 9$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>9$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 9 включена, поскольку точка $(-1;9)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $2\leq m\leq 9$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 30, а основание равно 36. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h=\sqrt{30^2-18^2}=24$.
Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 36\cdot 24=432$.
По формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$ получаем $R=\dfrac{30\cdot 30\cdot 36}{4\cdot 432}=\dfrac{75}{4}$.
Ответ: $\dfrac{75}{4}$.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 72$, $CD = 78$, основание $BC = 24$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 78 - 24 = 54$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 72$, $AP = BC = 24$, $PD = AD - BC = 30$.
В треугольнике CPD выполняется $72^2 + 30^2 = 78^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 72.
Площадь $S = \dfrac{54 + 24}{2} \cdot 72 = 2808$.
Ответ: 2808.

Решения. Вариант 89

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 175 \cdot \dfrac{60}{100} = 105$ мм.
Ответ: 105.

Задание 3

Диаметр диска: $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины: $205 \cdot \dfrac{65}{100} = 133{,}25$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 133{,}25 = 622{,}1$ мм.
Ответ: 622,1.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$205 \cdot \dfrac{60}{100} - 215 \cdot \dfrac{55}{100} = 4{,}75$ мм.
Ответ: 4,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 205 \cdot \dfrac{60}{100} = 627$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{627 - 622{,}1}{622{,}1} \cdot 100\% \approx 0{,}8\%$.
Ответ: 0,8.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{5}{4} - \dfrac{13}{5} = -\dfrac{27}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $-2{,}7$.
Ответ: $-2{,}7$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{277}$ приблизительно равно $16{,}643$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$12 + 2 = 14$.
Ответ: 14.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 10$. Из равенства получаем $x - (10) = 11$.
$x = 21$. Это значение допустимо, так как числитель $22 \neq 0$.
Ответ: 21.

Задание 10

Всего шаров $33+2+5 = 40$. Благоприятных исходов 2, поэтому вероятность равна $\frac{2}{40} = 0{,}05$.
Ответ: $0{,}05$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{3}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = x - 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{10{,}8 \cdot 18}{18 - 10{,}8} = 27$ Ом.
Ответ: 27.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 7. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-4; 7]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 5 \cdot 2^3 = 40$.
Ответ: 40.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 16^2 + 12^2 = 400$. Длина положительна, поэтому $BC = 20$.
Ответ: 20.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{12 \cdot 10}{2} = 60$.

Ответ: 60.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 5 и 12. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.

Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 97x^2 + 1296 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 97t + 1296 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 81) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 81$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 81$ — $x = \pm 9$.

Ответ: $-9;\ -4;\ 4;\ 9$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 120 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

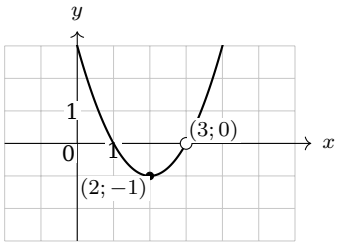
Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{x+2} = 3$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $240 = 3x(x+2)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 8)(x + 10) = 0$.
Корень $x = -10$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 8 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.

Ответ: 8 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-4x+3)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(2; -1)$ и выколотой точкой $(3; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 8 и 72. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $8 + 72 = 80$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 80 \cdot 8$ и $v^2 = 80 \cdot 72$.
Поэтому $u = 8\sqrt{10}$, $v = 24\sqrt{10}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 80 + 32\sqrt{10}$.
Ответ: $80 + 32\sqrt{10}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 10$, $MD = 6$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{36}{10} = \dfrac{18}{5}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 10 - \dfrac{18}{5} = \dfrac{32}{5}$.
Ответ: $\dfrac{32}{5}$.

Решения. Вариант 90

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

яблони — 5; баня — 6; жилой дом — 3; теплица — 1.
Ответ: 5631.

Задание 2

Дорожки занимают $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой получается $26+64=90$ м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 90 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{90}{8} \right\rceil = 12$.
Ответ: 12.

Задание 3

Баня занимает $2 \cdot 4 = 8$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $8 \cdot 4 = 32$ м^2.
Ответ: 32.

Задание 4

Вертикальные проекции построек перекрываются; горизонтальный промежуток составляет 9 клеток.
Расстояние равно $9 \cdot 2 = 18$ м.
Ответ: 18.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(24000 + 34800) - (18000 + 12000) = 28800$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 10 = 15$ руб.; электричество: $10 \cdot 4{,}5 = 45$ руб.
Экономия за час равна 30 руб. Срок: $28800 : 30 = 960$ ч.
Ответ: 960.

Задание 6

Сумма в скобках равна 12.
$12 : 0{,}4 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{44}$ приблизительно равно $-6{,}633$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{4\cdot 2-6} = 3^2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

$5x = 87 - (7) = 80$, поэтому $x = 16$.
Ответ: 16.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 96$; их 12. Вероятность равна $\dfrac{12}{100} = 0{,}12$.

Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 2x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 31{,}5}{3^2} = 7$ кг.

Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -3$, второе — $x \le 3$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-3; 3]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_8 = -26 + (8-1) \cdot (5) = 9$.
Ответ: 9.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 57° - 39° = 84°$.
Ответ: 84.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 24 \cdot 6 = 144$.
Ответ: 144.

Задание 18

Основание занимает 5 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=0-x$. Подставим во второе: $x^2+(0-x)^2=8$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-4=0$.
Разложим на множители: $(x+2)(x-2)=0$. Следовательно, $x=-2$ или $x=2$.
При $x=-2$ первое уравнение даёт $y=2$; при $x=2$ получаем $y=-2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 0, сумма их квадратов равна 8.
Ответ: $(x;y)=(-2;2)$ или $(x;y)=(2;-2)$.

Задание 21

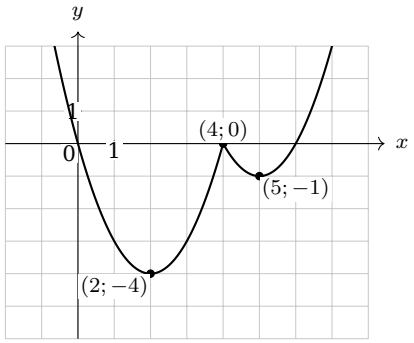
Моторная лодка прошла 76 км по течению реки и 9 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{76}{x+5}+\dfrac{9}{x-5}=5$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $5x^2-85x+210=0$. Его корни: $x=14$ и $x=3$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=14$ времена равны 4 ч и 1 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 7x + 12 - 3|x - 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -4)$ и $(1; -1)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -4$ пересечений нет; при $m = -4$ одно; при $-4 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 18$, $BF = 24$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{324 + 576} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 20$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 10$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 20/\cos 30^\circ = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Решения. Вариант 91

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

спальня — 4; кладовая — 3; коридор — 2; санузел — 1.
Ответ: 4321.

Задание 2

Пол коридора занимает 125 клеток, его площадь $125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}25 \cdot 0{,}5 = 0{,}125$ м^2. Требуется $31{,}25 : 0{,}125 = 250$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{250}{16} \right\rceil = 16$ целых упаковок.
Ответ: 16.

Задание 3

На плане помещение занимает 44 клеток.
Его площадь $44 \cdot 0{,}5^2 = 11$ м^2.
Ответ: 11.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 156 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{156 - 30}{30} \cdot 100\% = 420\%$.
Ответ: 420.

Задание 5

Тариф «А»: $440 + 18 \cdot 50 = 1340$ руб.
Тариф «Б»: $590 + 8 \cdot 35 = 870$ руб.
Безлимитный тариф стоит 885 руб. Наименьшая плата — 870 руб.
Ответ: 870.

Задание 6

$(-11)^2 = 121$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $121 - 49 = 72$.
Ответ: 72.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{223}{17}$ приблизительно равно $13{,}118$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $13 + 2\sqrt{143} + 11 - 2\sqrt{143} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 10)(x - 9) = 0$. Корни: -10 и 9.
Требуемый корень равен 9.
Ответ: 9.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 19 = 481$. Вероятность равна $\dfrac{481}{500} = 0{,}962$.

Ответ: $0{,}962$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 14$: $C = \dfrac{5}{9}(14 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-18) = -10$.

Ответ: -10.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 12-го ряда число мест увеличивается 11 раз: $18 + 11 \cdot 3 = 51$.
Ответ: 51.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 126^\circ = 54^\circ$, поэтому каждый равен 27°.
Ответ: 27.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $56 : 2 = 28$. Вторая сторона: $28 - 14 = 14$.
Площадь равна $14 \cdot 14 = 196$.
Ответ: 196.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 3 = 10{,}5$.

Ответ: $10{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-36}{x-3}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 3$. Разложим числитель: $x^2-36=(x-6)(x+6)$.
Критические точки: -6, 3, 6. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -6 и 6 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-6]\cup(3;6]$.

Задание 21

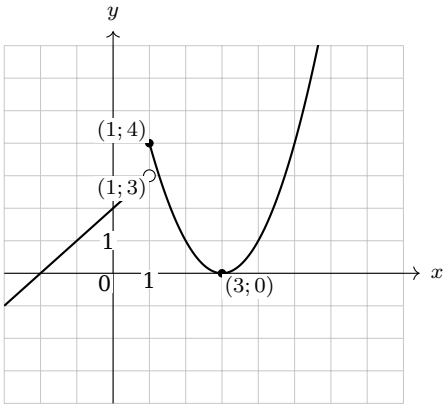
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 14 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 21 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+21$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+21)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+21}=\dfrac{1}{14}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+21)=14(2x+21)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=21$ и $x=-14$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{21}+\dfrac{1}{42}=\dfrac{1}{14}$, поэтому время совместной работы равно 14 ч.
Ответ: 21 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x-3)^2 + 0, & x \geq 1, \\ x + 2, & x < 1. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3;0)$, оставленная при $x \geq 1$. Точка $(1;4)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < 1$. Его конечная точка $(1;3)$ выколота.
При $m < 0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = 0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0 < m < 3$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $3 \leq m \leq 4$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m > 4$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 4 включена, поскольку точка $(1;4)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = 0$ или $3 \leq m \leq 4$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 21$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 26$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(5 + 26) = 62$.
Ответ: 62.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 7$, $BC = 8$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 8$ и $BH = AC = 7$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 7|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-7)^2 + 8^2$.

После раскрытия скобок получаем $14R = 113$. Поэтому $R = \dfrac{113}{14}$.

Ответ: $\dfrac{113}{14}$.

Решения. Вариант 92

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Иваново — 2; Журавушка — 1; Камышино — 3.
Ответ: 213.

Задание 2

Путь занимает 16 клеток.
Длина пути равна $16 \cdot 2 = 32$ км.
Ответ: 32.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 10 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ км.
Ответ: 26.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\frac{22}{16} \cdot 60 + \frac{26}{8} \cdot 60 = 277{,}5$.
Ответ: 277,5.

Задание 5

Васильково: $3 \cdot 69 + 0{,}5 \cdot 660 + 1 \cdot 863 = 1400$ руб.
Иваново: $3 \cdot 59 + 0{,}5 \cdot 645 + 1 \cdot 887 = 1386{,}5$ руб.
Камышино: $3 \cdot 54 + 0{,}5 \cdot 669 + 1 \cdot 908 = 1404{,}5$ руб.
Журавушка: $3 \cdot 62 + 0{,}5 \cdot 690 + 1 \cdot 878 = 1409$ руб.
Наименьшая стоимость — 1386,5 руб.
Ответ: 1386,5.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $1 - \frac{16}{5} = -\frac{11}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем -11.
Ответ: -11.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{436}$ приблизительно равно 20,881. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$21 + 2 = 23$.
Ответ: 23.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -7$. Из равенства получаем $x - (-7) = \frac{7}{4}$.
$x = -5{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $7 \neq 0$.
Ответ: $-5{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $43+5+2 = 50$. Благоприятных исходов 5, поэтому вероятность равна $\frac{5}{50} = 0{,}1$.
Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-2}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

$h = \frac{2S}{a+b} = \frac{2 \cdot 192{,}5}{10+25} = 11$.
Ответ: 11.

Задание 13

Получаем $-3x > -3$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 1)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 7 \cdot 2^3 = 56$.
Ответ: 56.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 70^\circ : 2 = 35^\circ$.
Ответ: 35.

Задание 17

$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{24+6}{2} \cdot 10 = 150$.
Ответ: 150.

Задание 18

Основание равно 4, высота равна 2. Площадь параллелограмма $S = 4 \cdot 2 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 49x - 147 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x + 3) - 49(x + 3) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x + 3)(x^2 - 49) = (x + 3)(x - 7)(x + 7) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-7;\ -3;\ 7$.
Ответ: $-7;\ -3;\ 7$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 14 км/ч, второго 18 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками 121 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

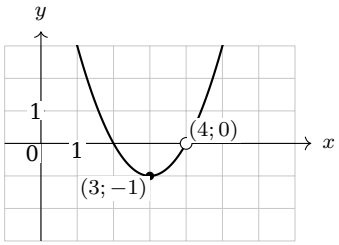
Сумма путей: $14(t - \frac{1}{2}) + 18t = 121$. Отсюда $32t = 128$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $18 \cdot 4 = 72$ км. Время движения первого $\frac{7}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 72 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-6x+8)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(3; -1)$ и выколотой точкой $(4; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 4$, $AC = 12$, $NC = 22$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 22$. По подобию $\dfrac{x}{x+22} = \dfrac{4}{12}$.
Отсюда $12x = 4(x+22)$, то есть $8x = 88$. Получаем $BN = 11$.
Ответ: 11.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 78$, $BC = 60$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{300}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 78 - \dfrac{300}{13} = \dfrac{714}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 60 \cdot \dfrac{\frac{714}{13}}{78} = \dfrac{7140}{169}$.

Ответ: $\dfrac{7140}{169}$.

Решения. Вариант 93

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Сосновка — 4; Берёзовка — 2; Луговое — 1.
Ответ: 421.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $24 + 21 + 28 = 73$ км.
Ответ: 73.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 21 и 28 км.
Её длина $\sqrt{21^2 + 28^2} = 35$ км.
Ответ: 35.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 24 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 35 км.
Время: $\dfrac{24}{100} \cdot 60 + \dfrac{35}{40} \cdot 60 = 66{,}9$ мин.
Ответ: 66,9.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{73 \cdot 9}{100} \cdot 77 = 505{,}89$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{53 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 77 = 469{,}315$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{24 \cdot 9 + 35 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 77 = 476{,}245$ руб.
Наименьшая стоимость — $469{,}315$ руб.
Ответ: 469,315.

Задание 6

Сумма в скобках равна 10.
$10 : 0{,}4 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{118}$ приблизительно равно $-10{,}863$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{4 \cdot 2 - 5} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$8x = -31 - (-15) = -16$, поэтому $x = -2$.
Ответ: -2.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 48$; их 6. Вероятность равна $\frac{6}{50} = 0{,}12$.

Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -3x$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \frac{13{,}2 \cdot 22}{22 - 13{,}2} = 33$ Ом.

Ответ: 33.

Задание 13

Нули множителей: -1 и 4. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-1; 4)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_7 = 20 + (7-1) \cdot (-3) = 2$.
Ответ: 2.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 29° - 49° = 102°$.
Ответ: 102.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45$.
Ответ: 45.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$.

Ответ: 96.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 7 и 4, поэтому площадь равна $7 \cdot 4 = 28$.
Ответ: 28.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{30}{x-72}+\dfrac{30}{x+72}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 72$ и $x\neq -72$.
Умножим уравнение на $(x-72)(x+72)$: $30(x+72)+30(x-72)=x^2-5184$.
Получим $x^2-60x-5184=0$, или $(x-30)^2=6084=78^2$.
Поэтому $x=30-78=-48$ или $x=30+78=108$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-48;\ 108$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 90 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $90-x$ кг, причём $0<x<90$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{15}{100}x+\dfrac{70}{100}(90-x)=\dfrac{35}{100}\cdot 90$.
Умножим на 100: $15x+6300-70x=3150$. Поэтому $55x=3150$ и $x=\dfrac{630}{11}$.
Это число лежит между 0 и 90, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{630}{11}$ кг.

Задание 22

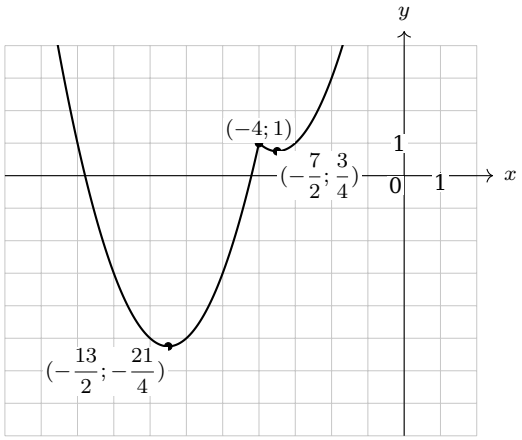
Постройте график функции $y = x^2 + 10x + 25 - 3|x + 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t + 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{21}{4})$ и $(\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.

При $m < -\frac{21}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{21}{4}$ одно; при $-\frac{21}{4} < m < \frac{3}{4}$ два; при $m = \frac{3}{4}$ три.

При $\frac{3}{4} < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = \frac{3}{4}$ или $m = 1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 78, а основание равно 60. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{78^2 - 30^2} = 72$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 72 = 2160$.

По формуле $R = \frac{abc}{4S}$ получаем $R = \frac{78 \cdot 78 \cdot 60}{4 \cdot 2160} = \frac{169}{4}$.

Ответ: $\frac{169}{4}$.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 48$, $CD = 102$, основание $BC = 6$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 102 - 6 = 96$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 48$, $AP = BC = 6$, $PD = AD - BC = 90$.
В треугольнике CPD выполняется $48^2 + 90^2 = 102^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 48.
Площадь $S = \dfrac{96 + 6}{2} \cdot 48 = 2448$.
Ответ: 2448.

Решения. Вариант 94

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м³ — печь № 3, 12 м³ — печь № 2, 8 м³ — печь № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

$V = 4{,}1 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}1 = 24{,}108$ м³.
Ответ: 24,108.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $16 : 2 = 8$ см и 15 см.
$R = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ см.
Ответ: 17.

Задание 4

После скидки остаётся 80% цены. Получаем $34600 \cdot \dfrac{80}{100} = 27680$ руб.
Ответ: 27680.

Задание 5

Объём парной равен $24{,}108$ м³. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $34600 + 1250 = 35850$ руб.
Печь № 3: $28400 + 1250 + 6150 = 35800$ руб.
Наименьшая сумма — 35800 руб.
Ответ: 35800.

Задание 6

$(-10)^2 = 100$, $12^2 = 144$. Поэтому значение выражения равно $100 - 144 = -44$.
Ответ: -44.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{122}{7}$ приблизительно равно $17{,}429$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $3 + 2\sqrt{30} + 10 - 2\sqrt{30} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 10)(x - 8) = 0$. Корни: -10 и 8.
Требуемый корень равен -10.
Ответ: -10.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 19 = 481$. Вероятность равна $\dfrac{481}{500} = 0{,}962$.

Ответ: $0{,}962$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 384}{8^2} = 12$ кг.

Ответ: 12.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -3$, второе — $x \le 0$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-3;0]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 15-го ряда число мест увеличивается 14 раз: $30 + 14 \cdot 3 = 72$.
Ответ: 72.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, поэтому каждый равен 30°.
Ответ: 30.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 24 \cdot 8 = 192$.
Ответ: 192.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 50t + 49 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 49) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 49$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 49$ — $x = \pm 7$.
Ответ: $-7;\ -1;\ 1;\ 7$.

Задание 21

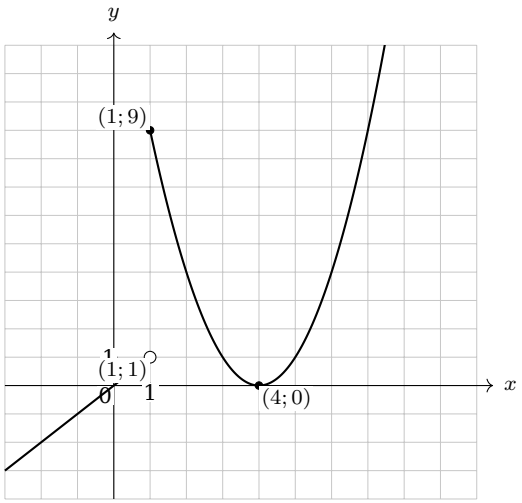
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 270 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{270}{x} - \dfrac{270}{x+3} = 3$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $810 = 3x(x+3)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 15)(x + 18) = 0$.
Корень $x = -18$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 15 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 15 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-4)^2+0, & x\geq 1,\\ x, & x<1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(4;0)$, оставленная при $x\geq 1$. Точка $(1;9)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x$ при $x<1$. Его конечная точка $(1;1)$ выколота. При $m<0$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=0$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $0<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $1\leq m\leq 9$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m>9$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 9 включена, поскольку точка $(1;9)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=0$ или $1\leq m\leq 9$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 9 и 36. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $9+36=45$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=45\cdot 9$ и $v^2=45\cdot 36$. Поэтому $u=9\sqrt{5}$, $v=18\sqrt{5}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=45+27\sqrt{5}$.
Ответ: $45+27\sqrt{5}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 11$, $MD = 7$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 49$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{49}{11} = \dfrac{49}{11}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 11 - \dfrac{49}{11} = \dfrac{72}{11}$.
Ответ: $\dfrac{72}{11}$.

Решения. Вариант 95

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 3.
Ответ: 3.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 8, 9, 11.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{22+4+8+6}{4}=10$ ГБ.
Ответ: 10.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 100 минут и 2 ГБ.
Плата: $560+100\cdot 2+2\cdot 70=900$ руб.
Ответ: 900.

Задание 5

За месяц № 10 использовано 300 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $560+0\cdot 2+0\cdot 70=560$ руб.
«Расширенный»: $815+0\cdot 2+0\cdot 50=815$ руб.
Наименьшая плата — 560 руб.
Ответ: 560.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{9}{4}-\dfrac{5}{4}=1$.
Умножаем на 5 и получаем 5.
Ответ: 5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{51}$ приблизительно равно $7{,}141$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$20+3=23$.
Ответ: 23.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 10$. Из равенства получаем $x - (10) = -\dfrac{13}{4}$.
$x = 6{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-13 \neq 0$.
Ответ: $6{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $27 + 3 + 10 = 40$. Благоприятных исходов 3, поэтому вероятность равна $\dfrac{3}{40} = 0{,}075$.
Ответ: $0{,}075$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = x - 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 167$: $C = \dfrac{5}{9}(167 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (135) = 75$.
Ответ: 75.

Задание 13

$4 = 2^2$. Требуются числа, модуль которых больше 2.
Множество решений: $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 7 \cdot 3^4 = 567$.
Ответ: 567.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $18 : 2 = 9$. Вторая сторона: $9 - 4 = 5$.
Площадь равна $4 \cdot 5 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 5 клеток. Площадь равна $\dfrac{8\cdot 5}{2}=20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=2,\\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=2-x$. Подставим во второе: $x^2+(2-x)^2=10$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-2x-3=0$.
Разложим на множители: $(x+1)(x-3)=0$. Следовательно, $x=-1$ или $x=3$.
При $x=-1$ первое уравнение даёт $y=3$; при $x=3$ получаем $y=-1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 2, сумма их квадратов равна 10.
Ответ: $(x;y)=(-1;3)$ или $(x;y)=(3;-1)$.

Задание 21

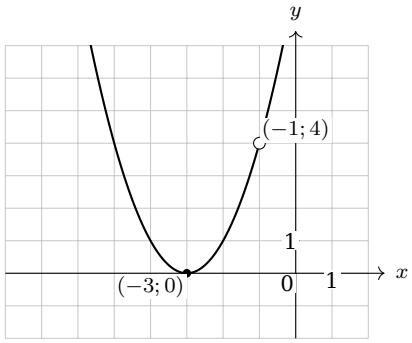
Моторная лодка прошла 72 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 6 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>2$. Скорости по течению и против течения равны $x+2$ и $x-2$.
Уравнение времени: $\dfrac{72}{x+2}+\dfrac{28}{x-2}=6$.
После умножения на $(x+2)(x-2)$ и приведения получаем $6x^2-100x+64=0$. Его корни: $x=16$ и $x=\dfrac{2}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>2$. Для $x=16$ времена равны 4 ч и 2 ч, их сумма 6 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+6x+9)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.
Строим параболу с вершиной $(-3;0)$ и выколотой точкой $(-1;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -5 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 30$, $BF = 72$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{900 + 5184} = 78$.
Ответ: 78.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 21$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{21}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 21/\cos 45^\circ = 21\sqrt{2}$.

Ответ: $21\sqrt{2}$.

Решения. Вариант 96

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 3, А6 — размеры № 2, А4 — размеры № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $4 \cdot 2^4 = 64$ листов.
Ответ: 64.

Задание 3

Размеры листа равны $10{,}5$ см и $14{,}8$ см.
Площадь $10{,}5 \cdot 14{,}8 = 155{,}4$ см^2.
Ответ: 155,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 80 \cdot 500}{1000} = 2{,}4948$ кг.
После округления получаем $2{,}5$ кг.
Ответ: 2,5.

Задание 5

Всего нужно $1005 \cdot 4 = 4020$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{4020}{500} \right\rceil = 9$.
Стоимость: $9 \cdot 500 = 4500$ руб.
Ответ: 4500.

Задание 6

Сумма в скобках равна $4{,}3$.
$4{,}3 : 0{,}8 = 5{,}375$.
Ответ: 5,375.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{221}$ приблизительно равно $-14{,}866$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{4\cdot 2-7} = 3^1 = 3$.
Ответ: 3.

Задание 9

$8x = 9 - (17) = -8$, поэтому $x = -1$.
Ответ: -1.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 39$; их 13. Вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = x + 2$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 130}{4 + 22} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $-5x \geq 20$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; -4]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_8 = -8 + (8-1) \cdot (-4) = -36$.
Ответ: -36.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 35° - 61° = 84°$.
Ответ: 84.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 84° : 2 = 42°$.
Ответ: 42.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{17 + 10}{2} \cdot 3 = 40{,}5$.
Ответ: $40{,}5$.

Задание 18

Основания равны 4 и 9, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{4+9}{2} \cdot 4 = 26$.

Ответ: 26.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-49}{x-3}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 3$. Разложим числитель: $x^2-49=(x-7)(x+7)$.
Критические точки: -7, 3, 7. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -7 и 7 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-7]\cup(3;7]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $11{,}2$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 42 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

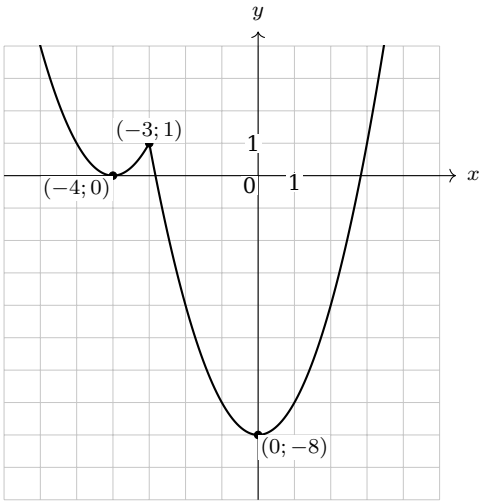
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+42$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+42)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+42}=\dfrac{5}{56}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+42)=\dfrac{56}{5}(2x+42)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x=14$ и $x=-\dfrac{168}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{14}+\dfrac{1}{56}=\dfrac{5}{56}$, поэтому время совместной работы равно $11{,}2$ ч.
Ответ: 14 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 4 - 4|x + 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 2t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 6t + 1$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1; 0)$ и $(3; -8)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.
При $m < -8$ пересечений нет; при $m = -8$ одно; при $-8 < m < 0$ два; при $m = 0$ три.
При $0 < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = 0$ или $m = 1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6$, $CK = 22$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 6$. Сторона $BC = BK + CK = 28$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(6 + 28) = 68$.
Ответ: 68.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 8$, $BC = 10$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 10$ и $BH = AC = 8$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 8|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-8)^2 + 10^2$.

После раскрытия скобок получаем $16R = 164$. Поэтому $R = \dfrac{41}{4}$.

Ответ: $\dfrac{41}{4}$.

Решения. Вариант 97

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 215, 225, 235 мм. Наименьшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 185 \cdot \dfrac{65}{100} = 120{,}25$ мм.
Ответ: 120,25.

Задание 3

Диаметр диска: $15 \cdot 25{,}4 = 381$ мм.
Высота боковины: $215 \cdot \dfrac{65}{100} = 139{,}75$ мм.
$D = 381 + 2 \cdot 139{,}75 = 660{,}5$ мм.
Ответ: 660,5.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$215 \cdot \dfrac{60}{100} - 225 \cdot \dfrac{55}{100} = 5{,}25$ мм.
Ответ: 5,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $16 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 215 \cdot \dfrac{60}{100} = 664{,}4$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{664{,}4 - 660{,}5}{660{,}5} \cdot 100\% \approx 0{,}6\%$.
Ответ: 0,6.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $10^2 = 100$. Поэтому значение выражения равно $25 - 100 = -75$.
Ответ: -75.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{363}{17}$ приблизительно равно $21{,}353$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $14 + 2\sqrt{182} + 13 - 2\sqrt{182} = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-3)(x-7)=0$. Корни: 3 и 7.
Требуемый корень равен 7.
Ответ: 7.

Задание 10

Исправных ламп $200-6=194$. Вероятность равна $\dfrac{194}{200}=0{,}97$.
Ответ: $0{,}97$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y=x^2-1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;1)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Из формулы $R(R_1+R_2)=R_1R_2$ получаем $R_2=\dfrac{RR_1}{R_1-R}$.
$R_2=\dfrac{14{,}4\cdot 24}{24-14{,}4}=36$ Ом.
Ответ: 36.

Задание 13

Нули множителей: -9 и -3. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-9;-3]$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 23-го ряда число мест увеличивается 22 раз: $23+22\cdot 3=89$.
Ответ: 89.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-64^\circ=116^\circ$, поэтому каждый равен 58°.
Ответ: 58.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT=\sqrt{OP^2-OT^2}=\sqrt{39^2-15^2}=36$.
Ответ: 36.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S=\dfrac{24\cdot 12}{2}=144$.
Ответ: 144.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 3 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 3 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 64x - 256 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 64(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+4)(x^2-64) = (x+4)(x-8)(x+8) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-8;\ -4;\ 8$.
Ответ: $-8;\ -4;\ 8$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 15 км/ч, второго 14 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками $104{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

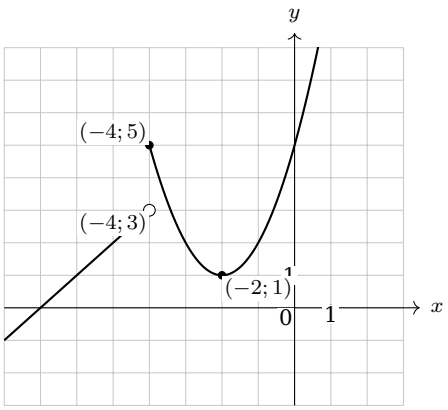
Сумма путей: $15(t - \dfrac{3}{4}) + 14t = \dfrac{419}{4}$. Отсюда $29t = 116$, то есть $t = 4$.

Второй велосипедист проехал $14 \cdot 4 = 56$ км. Время движения первого $\dfrac{13}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 56 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+2)^2+1, & x\geq -4,\\ x+7, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2;1)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;5)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+7$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;3)$ выколота.
При $m<1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $1<m<3$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $3\leq m\leq 5$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>5$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 5 включена, поскольку точка $(-4;5)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=1$ или $3\leq m\leq 5$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=5$, $AC=20$, $NC=23$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+23$. По подобию $\dfrac{x}{x+23}=\dfrac{5}{20}$.

Отсюда $20x=5(x+23)$, то есть $15x=115$. Получаем $BN=\dfrac{23}{3}$.

Ответ: $\dfrac{23}{3}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 102$, $BC = 96$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{768}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 102 - \dfrac{768}{17} = \dfrac{966}{17}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 96 \cdot \dfrac{\frac{966}{17}}{102} = \dfrac{15456}{289}$.

Ответ: $\dfrac{15456}{289}$.

Решения. Вариант 98

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

жилой дом — 3; сарай — 4; теплица — 1; яблони — 5.
Ответ: 3415.

Задание 2

Дорожки занимают $10+6+12-2=26$ м^2. Вместе с площадкой получается $26+64=90$ м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 90 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \dfrac{90}{12} \right\rceil = 8$.
Ответ: 8.

Задание 3

Дом занимает 17 клеток, баня — 8 клеток. Разность равна 9 клеткам.
Одна клетка соответствует $2^2=4$ м^2. Площадь равна $9\cdot 4=36$ м^2.
Ответ: 36.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Расстояние $\sqrt{(4\cdot 2)^2+(3\cdot 2)^2}=10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(25500+40360)-(20000+10500)=35360$ руб.
Газ за час: $1{,}2\cdot 5=6$ руб.; электричество: $8\cdot 5=40$ руб.
Экономия за час равна 34 руб. Срок: $35360:34=1040$ ч.
Ответ: 1040.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{11}{10}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{10}$.
Умножаем на 5 и получаем $4{,}5$.
Ответ: 4,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{141}$ приблизительно равно $11{,}874$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$23+1=24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -1$. Из равенства получаем $x - (-1) = \dfrac{15}{2}$.
$x = 6{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $30 \neq 0$.
Ответ: $6{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $25 + 10 + 5 = 40$. Благоприятных исходов 10, поэтому вероятность равна $\dfrac{10}{40} = 0{,}25$.
Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 216}{6^2} = 12$ кг.
Ответ: 12.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -12$, второе — $x \leq 0$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-12; 0]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 2 \cdot 2^5 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. Длина положительна, поэтому $BC = 13$.
Ответ: 13.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 14 \cdot 3 = 42$.
Ответ: 42.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 6 и 2, поэтому площадь равна $6 \cdot 2 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{48}{x-90} + \dfrac{48}{x+90} = 1$.

Область допустимых значений: $x \neq 90$ и $x \neq -90$.
Умножим уравнение на $(x-90)(x+90)$: $48(x+90) + 48(x-90) = x^2 - 8100$.
Получим $x^2 - 96x - 8100 = 0$, или $(x-48)^2 = 10404 = 102^2$.
Поэтому $x = 48 - 102 = -54$ или $x = 48 + 102 = 150$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-54;\ 150$.

Задание 21

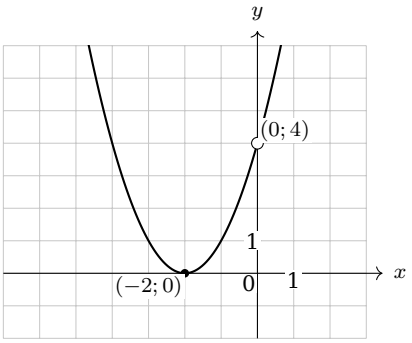
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 90 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $90 - x$ кг, причём $0 < x < 90$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{20}{100}x + \dfrac{75}{100}(90 - x) = \dfrac{40}{100} \cdot 90$.
Умножим на 100: $20x + 6750 - 75x = 3600$. Поэтому $55x = 3150$ и $x = \dfrac{630}{11}$.
Это число лежит между 0 и 90, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{630}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+4x+4)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2+4x+4 = (x+2)^2$. Строим параболу с вершиной $(-2;0)$ и выколотой точкой $(0;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 102, а основание равно 96. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{102^2 - 48^2} = 90$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 96 \cdot 90 = 4320$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{102 \cdot 102 \cdot 96}{4 \cdot 4320} = \dfrac{289}{5}$.
Ответ: $\dfrac{289}{5}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 90$, $CD = 102$, основание $BC = 27$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 102 - 27 = 75$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 90$, $AP = BC = 27$, $PD = AD - BC = 48$.
В треугольнике CPD выполняется $90^2 + 48^2 = 102^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 90.
Площадь $S = \dfrac{75 + 27}{2} \cdot 90 = 4590$.
Ответ: 4590.

Решения. Вариант 99

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

спальня — 4; гостиная — 6; кладовая — 3; коридор — 2.
Ответ: 4632.

Задание 2

Пол спальни занимает 99 клеток, его площадь $99 \cdot 0{,}4^2 = 15{,}84$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$ м^2. Требуется $15{,}84 : 0{,}08 = 198$ плиток.
Нужно $\left\lceil \frac{198}{6} \right\rceil = 33$ целых упаковок.
Ответ: 33.

Задание 3

На плане помещение занимает 20 клеток.
Его площадь $20 \cdot 0{,}4^2 = 3{,}2$ м^2.
Ответ: 3,2.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\frac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $450 + 25 \cdot 55 = 1825$ руб.
Тариф «Б»: $600 + 15 \cdot 30 = 1050$ руб.
Безлимитный тариф стоит 900 руб. Наименьшая плата — 900 руб.
Ответ: 900.

Задание 6

Сумма в скобках равна 7,5.
$7{,}5 : 0{,}5 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{356}$ приблизительно равно $-18{,}868$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3 \cdot 2 - 3} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$5x = -40{,}5 - (12) = -52{,}5$, поэтому $x = -10{,}5$.
Ответ: $-10{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 48$; их 8. Вероятность равна $\dfrac{8}{50} = 0{,}16$.

Ответ: $0{,}16$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = 3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -2x$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 131$: $C = \dfrac{5}{9}(131 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (99) = 55$.

Ответ: 55.

Задание 13

$4 = 2^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 2.
Множество решений: $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_7 = 16 + (7-1) \cdot (1) = 22$.
Ответ: 22.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 30° - 36° = 114°$.
Ответ: 114.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $46 : 2 = 23$. Вторая сторона: $23 - 10 = 13$.
Площадь равна $10 \cdot 13 = 130$.
Ответ: 130.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 8 и 6.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 68x^2 + 256 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 68t + 256 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 64) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 64$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 64$ — $x = \pm 8$.
Ответ: $-8;\ -2;\ 2;\ 8$.

Задание 21

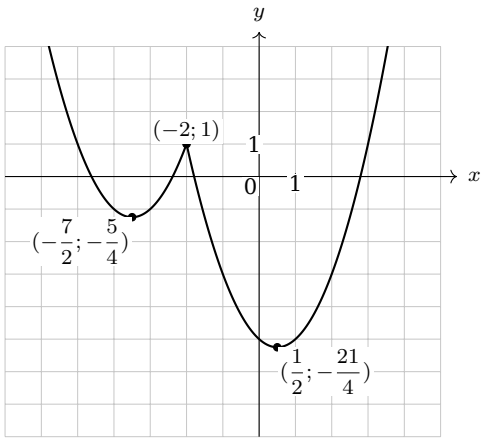
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 504 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{504}{x} - \dfrac{504}{x+4} = 3$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $2016 = 3x(x+4)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 24)(x + 28) = 0$.
Корень $x = -28$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 24 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 3x + 3 - 4|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t + 1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{5}{4})$ и $(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{21}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.
При $m < -\dfrac{21}{4}$ пересечений нет; при $m = -\dfrac{21}{4}$ одно; при $-\dfrac{21}{4} < m < -\dfrac{5}{4}$ два; при $m = -\dfrac{5}{4}$ три.
При $-\dfrac{5}{4} < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\dfrac{5}{4}$ или $m = 1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 32 и 72. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $32+72=104$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=104\cdot 32$ и $v^2=104\cdot 72$.
Поэтому $u=16\sqrt{13}$, $v=24\sqrt{13}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=104+40\sqrt{13}$.
Ответ: $104+40\sqrt{13}$.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD\parallel BC$, поэтому $\angle DAB+\angle ABC=180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB+\angle KBA=90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB=90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD=12$, $MD=8$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD\cdot DC=MD^2=64$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC}=\dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH=\dfrac{BD\cdot DC}{AD}=\dfrac{64}{12}=\dfrac{16}{3}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH=AD-DH=12-\dfrac{16}{3}=\dfrac{20}{3}$.
Ответ: $\dfrac{20}{3}$.

Решения. Вариант 100

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4; Иваново — 2; Камышино — 3.
Ответ: 423.

Задание 2

Путь занимает 12 клеток.
Длина пути равна $12 \cdot 1 = 12$ км.
Ответ: 12.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 16 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ км.
Ответ: 20.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{24} \cdot 60 + \frac{13}{16} \cdot 60 = 76{,}25$.
Ответ: 76,25.

Задание 5

Васильково: $4 \cdot 60 + 1 \cdot 650 + 1 \cdot 894 = 1784$ руб.
Иваново: $4 \cdot 55 + 1 \cdot 674 + 1 \cdot 915 = 1809$ руб.
Камышино: $4 \cdot 63 + 1 \cdot 695 + 1 \cdot 885 = 1832$ руб.
Журавушка: $4 \cdot 70 + 1 \cdot 665 + 1 \cdot 870 = 1815$ руб.
Наименьшая стоимость — 1784 руб.
Ответ: 1784.

Задание 6

$(-18)^2 = 324$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $324 - 4 = 320$.
Ответ: 320.

Задание 7

Значение числа $\frac{95}{11}$ приблизительно равно $8{,}636$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $13 + 2\sqrt{78} + 6 - 2\sqrt{78} = 19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 11)(x + 2) = 0$. Корни: -11 и -2.
Требуемый корень равен -11.
Ответ: -11.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 11 = 189$. Вероятность равна $\dfrac{189}{200} = 0{,}945$.

Ответ: $0{,}945$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 192}{11 + 21} = 12$.

Ответ: 12.

Задание 13

Получаем $-3x > -30$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 10)$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 22-го ряда число мест увеличивается 21 раз: $24 + 21 \cdot 4 = 108$.

Ответ: 108.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$, поэтому каждый равен 49°.

Ответ: 49.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 78^\circ : 2 = 39^\circ$.

Ответ: 39.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{15 + 5}{2} \cdot 3 = 30$.

Ответ: 30.

Задание 18

Основание занимает 7 клеток, высота — 3 клеток. Площадь равна $\dfrac{7 \cdot 3}{2} = 10{,}5$.

Ответ: $10{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=4, \\ x^2+y^2=16. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=4-x$. Подставим во второе: $x^2+(4-x)^2=16$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-4x=0$.
Разложим на множители: $(x)(x-4)=0$. Следовательно, $x=0$ или $x=4$.
При $x=0$ первое уравнение даёт $y=4$; при $x=4$ получаем $y=0$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 4, сумма их квадратов равна 16.
Ответ: $(x;y)=(0;4)$ или $(x;y)=(4;0)$.

Задание 21

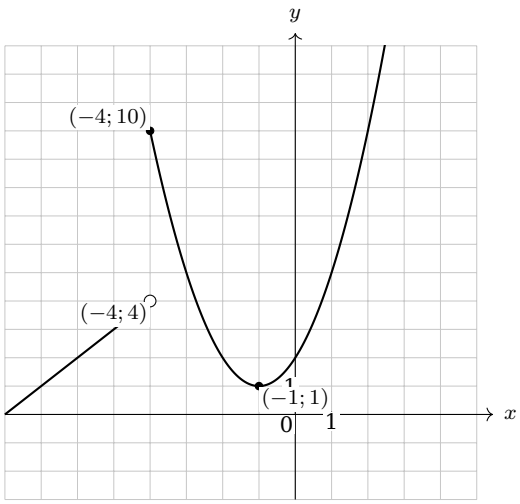
Моторная лодка прошла 84 км по течению реки и 45 км против течения, затратив на весь путь 7 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{84}{x+3}+\dfrac{45}{x-3}=7$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $7x^2-129x+54=0$. Его корни: $x=18$ и $x=\dfrac{3}{7}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=18$ времена равны 4 ч и 3 ч, их сумма 7 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2+1, & x\geq -4,\\ x+8, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;1)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;10)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+8$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;4)$ выколота.
При $m<1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $1<m<4$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $4\leq m\leq 10$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>10$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 10 включена, поскольку точка $(-4;10)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=1$ или $4\leq m\leq 10$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=48$, $BF=90$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{2304+8100}=102$.
Ответ: 102.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM=AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD=MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD=AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM=CD/2=AB/2$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 22$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 11$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 22/\cos 60^\circ = 44$.
Ответ: 44.

Решения. Вариант 101

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 4; Берёзовка — 3; Озёрное — 1.
Ответ: 431.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $22 + 14 + 48 = 84$ км.
Ответ: 84.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 36 и 48 км.
Её длина $\sqrt{36^2 + 48^2} = 60$ км.
Ответ: 60.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 22 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 50 км.
Время: $\dfrac{22}{75} \cdot 60 + \dfrac{50}{50} \cdot 60 = 77{,}6$ мин.
Ответ: 77,6.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{84 \cdot 6{,}5}{100} \cdot 79 = 431{,}34$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{60 \cdot 8}{100} \cdot 79 = 379{,}2$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{22 \cdot 6{,}5 + 50 \cdot 8}{100} \cdot 79 = 428{,}97$ руб.
Наименьшая стоимость — $379{,}2$ руб.
Ответ: 379,2.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{15}{4} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{67}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $6{,}7$.
Ответ: 6,7.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{229}$ приблизительно равно $15{,}133$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$20 + 1 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 1$. Из равенства получаем $x-(1)=-\frac{1}{5}$.
$x = 0{,}8$. Это значение допустимо, так как числитель $-1 \neq 0$.
Ответ: $0{,}8$.

Задание 10

Всего шаров $10 + 25 + 5 = 40$. Благоприятных исходов 25, поэтому вероятность равна $\frac{25}{40} = 0{,}625$.
Ответ: $0{,}625$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-1}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 1$.
Ответ: 312.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{18 \cdot 30}{30 - 18} = 45$ Ом.
Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -8 и -3. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-8; -3)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 5 \cdot 2^5 = 160$.
Ответ: 160.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Длина положительна, поэтому $BC = 17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
Ответ: 4.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{10 \cdot 20}{2} = 100$.

Ответ: 100.

Задание 18

Основания равны 3 и 5, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{3+5}{2} \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 64}{x - 3} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 3$. Разложим числитель: $x^2 - 64 = (x-8)(x+8)$.
Критические точки: -8, 3, 8. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -8 и 8 включаем, точку 3 исключаем.
Ответ: $(-\infty; -8] \cup (3; 8]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $9{,}6$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 8 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x + 8$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+8)$ заказа в час.

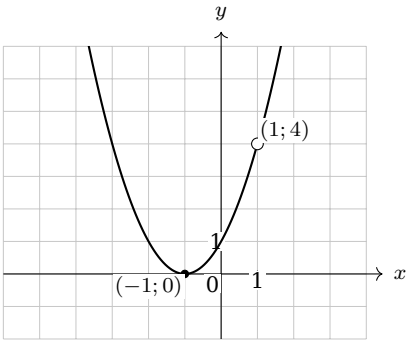
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+8} = \dfrac{5}{48}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+8) = \dfrac{48}{5}(2x+8)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 16$ и $x = -\dfrac{24}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{5}{48}$, поэтому время совместной работы равно $9{,}6$ ч.
Ответ: 16 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2+2x+1)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Строим параболу с вершиной $(-1;0)$ и выколотой точкой $(1;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 23$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 7$. Сторона $BC = BK + CK = 30$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(7 + 30) = 74$.
Ответ: 74.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 7$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 7$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 7^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 58$. Поэтому $R = \dfrac{29}{3}$.

Ответ: $\dfrac{29}{3}$.

Решения. Вариант 102

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

$V = 4{,}2 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}2 = 22{,}176$ м^3.
Ответ: 22,176.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $32 : 2 = 16$ см и 30 см.
$R = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34$ см.
Ответ: 34.

Задание 4

После скидки остаётся 90% цены. Получаем $35200 \cdot \dfrac{90}{100} = 31680$ руб.
Ответ: 31680.

Задание 5

Объём парной равен $22{,}176$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $35200 + 1300 = 36500$ руб.
Печь № 3: $28800 + 1300 + 6300 = 36400$ руб.
Наименьшая сумма — 36400 руб.
Ответ: 36400.

Задание 6

Сумма в скобках равна 4.
$4 : 0{,}4 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{32}$ приблизительно равно $-5{,}657$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{3 \cdot 2 - 5} = 4^1 = 4$.
Ответ: 4.

Задание 9

$5x = -79{,}5 - (-12) = -67{,}5$, поэтому $x = -13{,}5$.
Ответ: $-13{,}5$.

Задание 10

На 7 делятся числа $7, 14, \ldots, 49$; их 7. Вероятность равна $\dfrac{7}{50} = 0{,}14$.

Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -2x$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
Ответ: 123.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 242}{11^2} = 4$ кг.

Ответ: 4.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -8$, второе — $x \le -2$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-8; -2]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{15} = 24 + (15-1) \cdot (-2) = -4$.
Ответ: -4.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 68° - 52° = 60°$.
Ответ: 60.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 11 \cdot 8 = 88$.
Ответ: 88.

Задание 18

Основание равно 3, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 3 \cdot 6 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 5x^2 - 81x - 405 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+5) - 81(x+5) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+5)(x^2-81) = (x+5)(x-9)(x+9) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-9;\ -5;\ 9$.
Ответ: $-9;\ -5;\ 9$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 10 км/ч, второго 17 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $132{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $10(t - \frac{1}{4}) + 17t = \frac{265}{2}$. Отсюда $27t = 135$, то есть $t = 5$.

Второй велосипедист проехал $17 \cdot 5 = 85$ км. Время движения первого $\frac{19}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 85 км.

Задание 22

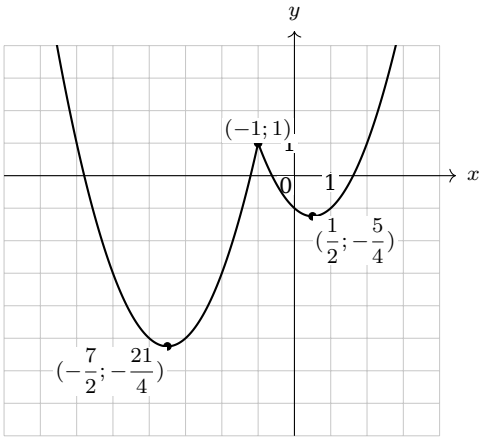
Постройте график функции $y = x^2 + 3x + 3 - 4|x + 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t + 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{21}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 1$.

При $m < -\frac{21}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{21}{4}$ одно; при $-\frac{21}{4} < m < -\frac{5}{4}$ два; при $m = -\frac{5}{4}$ три.

При $-\frac{5}{4} < m < 1$ пересечений четыре. При $m = 1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{5}{4}$ или $m = 1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 6$, $AC = 12$, $NC = 24$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 24$. По подобию $\frac{x}{x + 24} = \frac{6}{12}$.

Отсюда $12x = 6(x + 24)$, то есть $6x = 144$. Получаем $BN = 24$.

Ответ: 24.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.

Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.

Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 35$, $BC = 42$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{126}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 35 - \dfrac{126}{5} = \dfrac{49}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 42 \cdot \dfrac{\frac{49}{5}}{35} = \dfrac{294}{25}$.

Ответ: $\dfrac{294}{25}$.

Решения. Вариант 103

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{10+12+14+8}{4}=11$ ГБ.
Ответ: 11.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 0 ГБ.
Плата: $570+0\cdot 2+0\cdot 60=570$ руб.
Ответ: 570.

Задание 5

За месяц № 4 использовано 250 минут и 10 ГБ.
«Основной»: $570+0\cdot 2+0\cdot 60=570$ руб.
«Расширенный»: $830+0\cdot 2+0\cdot 50=830$ руб.
Наименьшая плата — 570 руб.
Ответ: 570.

Задание 6

$(-16)^2=256$, $2^2=4$. Поэтому значение выражения равно $256-4=252$.
Ответ: 252.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{219}{17}$ приблизительно равно $12{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $5+2\sqrt{35}+7-2\sqrt{35}=12$.
Ответ: 12.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+5)(x+3)=0$. Корни: -5 и -3.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 25 = 175$. Вероятность равна $\dfrac{175}{200} = 0{,}875$.

Ответ: $0{,}875$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Подставляем $F = 95$: $C = \dfrac{5}{9}(95 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (63) = 35$.

Ответ: 35.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых больше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 14-го ряда число мест увеличивается 13 раз: $26 + 13 \cdot 5 = 91$.
Ответ: 91.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$, поэтому каждый равен 26°.
Ответ: 26.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $42 : 2 = 21$. Вторая сторона: $21 - 6 = 15$.
Площадь равна $6 \cdot 15 = 90$.
Ответ: 90.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 4, поэтому площадь равна $8 \cdot 4 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{21}{x-28}+\frac{21}{x+28}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 28$ и $x \neq -28$.
Умножим уравнение на $(x-28)(x+28)$: $21(x+28)+21(x-28)=x^2-784$.
Получим $x^2-42x-784=0$, или $(x-21)^2=1225=35^2$.
Поэтому $x=21-35=-14$ или $x=21+35=56$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-14;\ 56$.

Задание 21

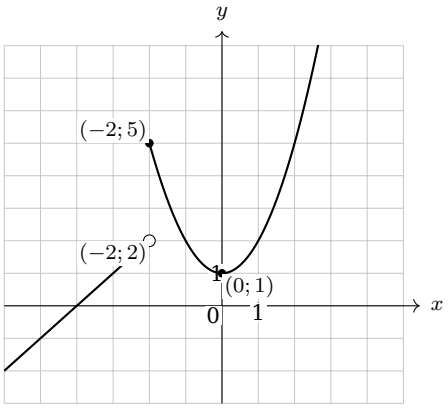
Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 90 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $90-x$ кг, причём $0<x<90$.
Количество меди сохраняется: $\frac{25}{100}x+\frac{65}{100}(90-x)=\frac{45}{100}\cdot 90$.
Умножим на 100: $25x+5850-65x=4050$. Поэтому $40x=1800$ и $x=45$.
Это число лежит между 0 и 90, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 45 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x)^2 + 1, & x \geq -2, \\ x + 4, & x < -2. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0; 1)$, оставленная при $x \geq -2$. Точка $(-2; 5)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 4$ при $x < -2$. Его конечная точка $(-2; 2)$ выколота.
При $m < 1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = 1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $1 < m < 2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три. При $2 \leq m \leq 5$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки. При $m > 5$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 5 включена, поскольку точка $(-2; 5)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = 1$ или $2 \leq m \leq 5$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 35, а основание равно 42. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{35^2 - 21^2} = 28$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 42 \cdot 28 = 588$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{35 \cdot 35 \cdot 42}{4 \cdot 588} = \dfrac{175}{8}$.
Ответ: $\dfrac{175}{8}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 84$, $CD = 91$, основание $BC = 28$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 91 - 28 = 63$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 84$, $AP = BC = 28$, $PD = AD - BC = 35$.

В треугольнике CPD выполняется $84^2 + 35^2 = 91^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 84.

Площадь $S = \dfrac{63 + 28}{2} \cdot 84 = 3822$.

Ответ: 3822.

Решения. Вариант 104

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А4 — размеры № 1, А3 — размеры № 2, А6 — размеры № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 90 \cdot 250}{1000} = 0{,}6993$ кг.
После округления получаем $0{,}7$ кг.
Ответ: 0,7.

Задание 5

Всего нужно $1040 \cdot 2 = 2080$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2080}{250} \right\rceil = 9$.
Стоимость: $9 \cdot 520 = 4680$ руб.
Ответ: 4680.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{5}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Умножаем на 3 и получаем $1{,}5$.
Ответ: 1,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{366}$ приблизительно равно $19{,}131$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$19 + 2 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 8$. Из равенства получаем $x-(8)=-\frac{1}{8}$.
$x = 7{,}875$. Это значение допустимо, так как числитель $-1 \neq 0$.
Ответ: $7{,}875$.

Задание 10

Всего шаров $63 + 9 + 28 = 100$. Благоприятных исходов 9, поэтому вероятность равна $\frac{9}{100} = 0{,}09$.
Ответ: $0{,}09$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = x + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-3}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \frac{2S}{a+b} = \frac{2 \cdot 169}{10+16} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -25$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 5]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$.
Ответ: 162.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2 = 289$. Длина положительна, поэтому $BC = 17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 40^\circ : 2 = 20^\circ$.
Ответ: 20.

Задание 17

$S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH = \frac{20+7}{2} \cdot 5 = 67{,}5$.
Ответ: $67{,}5$.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 12 и 5. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 90x^2 + 729 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 90t + 729 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 81) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 81$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 81$ — $x = \pm 9$.
Ответ: $-9;\ -3;\ 3;\ 9$.

Задание 21

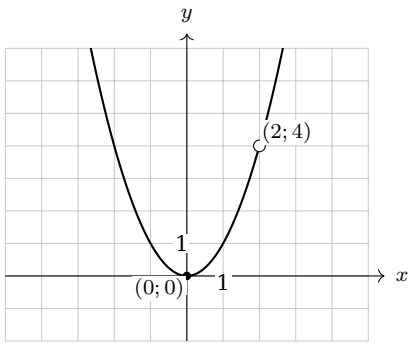
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 336 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 3 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{336}{x} - \dfrac{336}{x+2} = 3$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $672 = 3x(x+2)$.
После деления на 3 и разложения: $(x - 14)(x + 16) = 0$.
Корень $x = -16$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 14 км/ч. Разность времён действительно равна 3 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2$.
Строим параболу с вершиной $(0;0)$ и выколотой точкой $(2;4)$.
При $m < 0$ общих точек нет. При $m = 0$ имеется одна точка — вершина.
При $m > 0$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 4$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = 0$ или $m = 4$.



Ответ: $m = 0$ или $m = 4$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 25 и 36. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $25 + 36 = 61$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 61 \cdot 25$ и $v^2 = 61 \cdot 36$.
Поэтому $u = 5\sqrt{61}$, $v = 6\sqrt{61}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 61 + 11\sqrt{61}$.
Ответ: $61 + 11\sqrt{61}$.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - \frac{9}{8} = \frac{55}{8}$.
Ответ: $\frac{55}{8}$.