Решения. Вариант 03

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

яблони — 5, теплица — 1, жилой дом — 3, баня — 6. **Ответ:** 5136.

Задание 2

Вертикальные дорожки занимают 10 и 6 м^2, горизонтальная — 12 м^2. Вычитаем два пересечения по 1 м^2.
Нужно $10 + 6 + 12 - 2 = 26$ плиток.
$26 : 4 = 6{,}5$. Требуется 7 целых упаковок.
Ответ: 7.

Задание 3

Огород занимает $7 \cdot 3 = 21$ клетку, теплица — $3 \cdot 1 = 3$ клетки.
Открытая часть занимает $(21 - 3) \cdot 2^2 = 72$ м^2.
Ответ: 72.

Задание 4

Ближайшие точки — левый край ворот и нижний правый угол сарая.
По горизонтали между ними $4 \cdot 2 = 8$ м, по вертикали $3 \cdot 2 = 6$ м.
Расстояние $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(26000 + 22400) - (18000 + 12000) = 18400$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 8 = 12$ руб.; электричество: $7 \cdot 5 = 35$ руб.
Экономия за час 23 руб. Срок: $18400 : 23 = 800$ ч.
Ответ: 800.

Задание 6

$$\frac{1}{10} + \frac{31}{20} = 1{,}65.$$
Ответ: $1{,}65$.

Задание 7

Числа в порядке возрастания: $-0{,}02 < 0{,}09 < 0{,}098 < 0{,}11$. Числу $0{,}09$ соответствует точка B. **Ответ:** 2.

Задание 8

$\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

$4x(x - 7) = 0$. Корни: 0 и 7. Меньший корень равен 0.
Ответ: 0.

Задание 10

Всего 10 спортсменов, из Швеции — 2. Вероятность равна $2 : 10 = 0{,}2$.
Ответ: $0{,}2$.

Задание 11

Ветви вверх означают $a > 0$, ветви вниз — $a < 0$. Знак c определяем по положению пересечения графика с осью y. Условиям А, Б, В отвечают графики 3, 2, 1. **Ответ:** 321.

Задание 12

$t_F = 1{,}8 \cdot (-15) + 32 = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 8. Произведение неположительно между корнями, включая границы: $-4 \le x \le 8$. **Ответ:** 3.

Задание 14

За 4 минуты температура уменьшилась на $5 \cdot 4 = 20$ градусов. Получаем $-9 - 20 = -29$.
Ответ: -29.

Задание 15

Биссектриса делит угол пополам: $\angle BAD = 76^\circ : 2 = 38^\circ$.
Ответ: 38.

Задание 16

AB — диаметр, поэтому $\angle ACB = 90^\circ$ и $AB = 50$. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{50^2 - 40^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Средняя линия равна полусумме оснований: $(4 + 10) : 2 = 7$.
Ответ: 7.

Задание 18

На сетке основание параллелограмма равно 7, высота равна 6. Площадь $S = 7 \cdot 6 = 42$.
Ответ: 42.

Задание 19

Первое утверждение неверно: равенство углов гарантирует подобие, но не равенство. Утверждения 2 и 3 верны по свойствам параллельных прямых и определению окружности. **Ответ:** 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$.
Вынесем общий множитель и разложим разность квадратов: $(x+3)(x-2)(x+2) = 0$.
Произведение равно нулю, если хотя бы один множитель равен нулю. **Ответ:** $-3, -2, 2$.

Задание 21

Первые 240 км автомобиль ехал со скоростью 80 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 40 км/ч, а последние 180 км — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути.

Время на трёх участках: $240/80 = 3$ ч, $120/40 = 3$ ч и $180/60 = 3$ ч.
Весь путь равен $240 + 120 + 180 = 540$ км, всё время — $3 + 3 + 3 = 9$ ч.

Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{540}{9} = 60$ км/ч.

Ответ: 60.

Задание 22

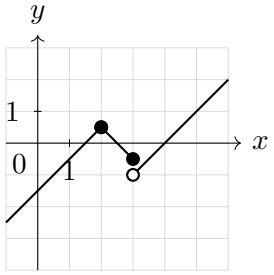
Постройте график функции $y = \begin{cases} x - \dfrac{3}{2}, & x < 2, \\ \dfrac{5}{2} - x, & 2 \le x \le 3, \\ x - 4, & x > 3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Строим три части прямых на указанных промежутках. У первого луча точка $(2; \frac{1}{2})$ выколота; у среднего отрезка точки $(2; \frac{1}{2})$ и $(3; -\frac{1}{2})$ включены; у последнего луча точка $(3; -1)$ выколота.

Первый луч даёт одно пересечение при $m < \dfrac{1}{2}$. Средний отрезок — при $-\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{1}{2}$. Правый луч — при $m > -1$.

При $m \le -1$ точка одна; при $-1 < m < -\dfrac{1}{2}$ их две; при $-\dfrac{1}{2} \le m < \dfrac{1}{2}$ их три; при $m = \dfrac{1}{2}$ их две; при $m > \dfrac{1}{2}$ точка одна.

Ответ: $-1 < m < -\dfrac{1}{2}$ или $m = \dfrac{1}{2}$.



Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 16$.

Так как $AD \parallel BC$, угол AKB равен углу KAD. По свойству биссектрисы $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, откуда $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 21$.
Периметр $P = 2(AB + BC) = 2(5 + 21) = 52$.
Ответ: 52.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1A_1 = \angle CAA_1$.

Высоты дают прямые углы AA_1C и AC_1C. Поэтому точки A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC.
На этой окружности вписанные углы CC_1A_1 и CAA_1 опираются на одну и ту же дугу CA_1, поэтому равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 15$, $MD = 5$, а H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Точка D лежит на стороне BC. Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD — высота к гипотенузе. Из подобия треугольников BMD и MCD следует $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку стороны этих углов соответственно перпендикулярны. Следовательно, $\triangle BDH \sim \triangle ADC$.

Из подобия $DH/DC = BD/AD$, поэтому $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{15} = \dfrac{5}{3}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $H \in AD$. Поэтому $AH = AD - DH = 15 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{40}{3}$.

Ответ: $\dfrac{40}{3}$.