Решения. Вариант 13

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{4+8+6+10}{4} = 7$ ГБ.
Ответ: 7.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 0 ГБ.
Плата: $450 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 450$ руб.
Ответ: 450.

Задание 5

За месяц № 4 использовано 250 минут и 10 ГБ.
«Основной»: $450 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 450$ руб.
«Расширенный»: $650 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 650$ руб.
Наименьшая плата — 450 руб.
Ответ: 450.

Задание 6

$(-6)^2 = 36$, $11^2 = 121$. Поэтому значение выражения равно $36 - 121 = -85$.
Ответ: -85.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{202}{17}$ приблизительно равно $11{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $10 + 2\sqrt{70} + 7 - 2\sqrt{70} = 17$.
Ответ: 17.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-1)(x-4) = 0$. Корни: 1 и 4.
Требуемый корень равен 4.
Ответ: 4.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 11 = 189$. Вероятность равна $\frac{189}{200} = 0{,}945$.
Ответ: $0{,}945$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{16{,}8 \cdot 28}{28 - 16{,}8} = 42$ Ом.
Ответ: 42.

Задание 13

Нули множителей: -5 и 4. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-5; 4)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 23-го ряда число мест увеличивается 22 раз: $14 + 22 \cdot 2 = 58$.
Ответ: 58.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$, поэтому каждый равен 72°.
Ответ: 72.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 3 и 4, поэтому площадь равна $3 \cdot 4 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{3}{x-4}+\frac{3}{x+4}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 4$ и $x\neq -4$.
Умножим уравнение на $(x-4)(x+4)$: $3(x+4)+3(x-4)=x^2-16$.
Получим $x^2-6x-16=0$, или $(x-3)^2=25=5^2$.
Поэтому $x=3-5=-2$ или $x=3+5=8$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-2;\ 8$.

Задание 21

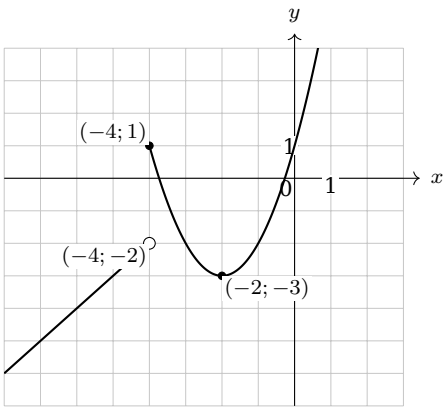
Имеются два сплава с содержанием меди 10% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{10}{100}x+\frac{65}{100}(50-x)=\frac{35}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $10x+3250-65x=1750$. Поэтому $55x=1500$ и $x=\frac{300}{11}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{300}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x+2)^2 - 3, & x \geq -4, \\ x + 2, & x < -4. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2; -3)$, оставленная при $x \geq -4$. Точка $(-4; 1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < -4$. Его конечная точка $(-4; -2)$ выколота.
При $m < -3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3 < m < -2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-2 \leq m \leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(-4; 1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -3$ или $-2 \leq m \leq 1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 5, а основание равно 6. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 12} = \dfrac{25}{8}$.
Ответ: $\dfrac{25}{8}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 12$, $CD = 13$, основание $BC = 4$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 13 - 4 = 9$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 12$, $AP = BC = 4$, $PD = AD - BC = 5$.
В треугольнике CPD выполняется $12^2 + 5^2 = 13^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 12.
Площадь $S = \dfrac{9+4}{2} \cdot 12 = 78$.
Ответ: 78.