Решения. Вариант 14

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А2 — размеры № 1, А4 — размеры № 2, А6 — размеры № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 70 \cdot 250}{1000} = 1{,}091475$ кг.
После округления получаем $1{,}1$ кг.
Ответ: 1,1.

Задание 5

Всего нужно $620 \cdot 2 = 1240$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1240}{250} \right\rceil = 5$.
Стоимость: $5 \cdot 280 = 1400$ руб.
Ответ: 1400.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{10} - \dfrac{17}{4} = -\dfrac{43}{20}$.
Умножаем на 2 и получаем $-4{,}3$.
Ответ: $-4{,}3$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{356}$ приблизительно равно $18{,}868$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$17 + 1 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -4$. Из равенства получаем $x - (-4) = -4$.
$x = -8$. Это значение допустимо, так как числитель $-16 \neq 0$.
Ответ: -8.

Задание 10

Всего шаров $4+3+33 = 40$. Благоприятных исходов 3, поэтому вероятность равна $\dfrac{3}{40} = 0{,}075$.
Ответ: $0{,}075$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{-1}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 192}{8^2} = 6$ кг.
Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -7$, второе — $x \leq -1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-7; -1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 5 \cdot 2^3 = 40$.
Ответ: 40.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36^2 + 15^2 = 1521$. Длина положительна, поэтому $BC = 39$.
Ответ: 39.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 9 \cdot 11 = 99$.
Ответ: 99.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 4 и 3. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 3 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 10t + 9 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 9) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 9$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 9$ — $x = \pm 3$.
Ответ: $-3;\ -1;\ 1;\ 3$.

Задание 21

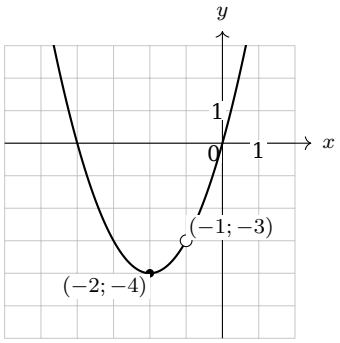
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 40 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{40}{x} - \dfrac{40}{x + 2} = 1$. Умножив на $x(x + 2)$, получаем $80 = 1x(x + 2)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 8)(x + 10) = 0$.
Корень $x = -10$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 8 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 8 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2+4x)}{x+1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq -1$. На этой области она равна $y = x^2+4x = (x+2)^2-4$.
Строим параболу с вершиной $(-2;-4)$ и выколотой точкой $(-1;-3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 4 и 9. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $4 + 9 = 13$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 13 \cdot 4$ и $v^2 = 13 \cdot 9$.
Поэтому $u = 2\sqrt{13}$, $v = 3\sqrt{13}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 13 + 5\sqrt{13}$.
Ответ: $13 + 5\sqrt{13}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 5$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{9}{5} = \frac{9}{5}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$.
Ответ: $\frac{16}{5}$.