Решения. Вариант 16

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

$V = 3{,}1 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}1 = 16{,}275$ м^3.
Ответ: 16,275.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $24 : 2 = 12$ см и 16 см.
$R = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ см.
Ответ: 20.

Задание 4

После скидки остаётся 88% цены. Получаем $28600 \cdot \dfrac{88}{100} = 25168$ руб.
Ответ: 25168.

Задание 5

Объём парной равен $16{,}275$ м^3. Подходят печи № 1, 2, 3.
Печь № 1: $22500 + 750 = 23250$ руб.
Печь № 2: $28600 + 750 = 29350$ руб.
Печь № 3: $24400 + 750 + 4650 = 29800$ руб.
Наименьшая сумма — 23250 руб.
Ответ: 23250.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $3^2 = 9$. Поэтому значение выражения равно $25 - 9 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{166}{11}$ приблизительно равно $15{,}091$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $10 + 2\sqrt{110} + 11 - 2\sqrt{110} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 3)(x - 5) = 0$. Корни: -3 и 5.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 23 = 477$. Вероятность равна $\dfrac{477}{500} = 0{,}954$.

Ответ: $0{,}954$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 108}{11 + 25} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $2x \geq 14$. Делим на 2, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $[7; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $19 + 20 \cdot 3 = 79$.
Ответ: 79.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$, поэтому каждый равен 69°.
Ответ: 69.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 66^\circ : 2 = 33^\circ$.
Ответ: 33.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{16 + 7}{2} \cdot 14 = 161$.
Ответ: 161.

Задание 18

Основания равны 3 и 8, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{3 + 8}{2} \cdot 2 = 11$.

Ответ: 11.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-25}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-25 = (x-5)(x+5)$.
Критические точки: -5, 1, 5. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -5 и 5 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-5]\cup(1;5]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 4 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 6 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

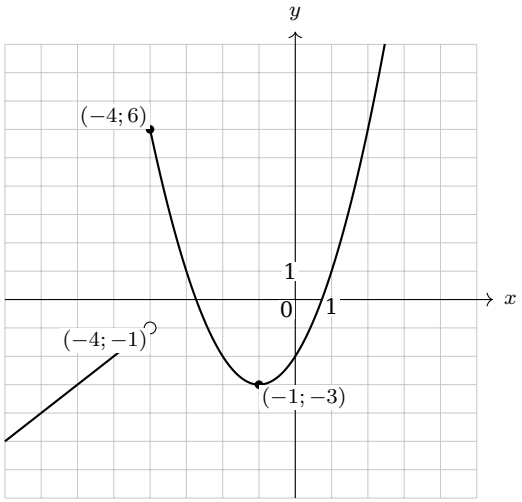
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+6$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+6)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{1}{4}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+6) = 4(2x+6)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 6$ и $x = -4$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{4}$, поэтому время совместной работы равно 4 ч.
Ответ: 6 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2-3, & x\geq -4,\\ x+3, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;-3)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;6)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+3$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;-1)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1\leq m\leq 6$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>6$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 6 включена, поскольку точка $(-4;6)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-1\leq m\leq 6$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=4$, $CK=6$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=4$. Сторона $BC=BK+CK=10$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(4+10)=28$.
Ответ: 28.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 4$, $BC = 6$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 6$ и $BH = AC = 4$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 4|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-4)^2 + 6^2$.

После раскрытия скобок получаем $8R = 52$. Поэтому $R = \dfrac{13}{2}$.

Ответ: $\dfrac{13}{2}$.