Решения. Вариант 17

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 9.
Ответ: 9.

Задание 2

Лимит равен 350 минутам. Он превышен в месяцах № 4, 6, 7, 9, 10, 11.
Всего таких месяцев — 6.
Ответ: 6.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{12+14+8+16}{4} = 12{,}5$ ГБ.
Ответ: $12{,}5$.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 12 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 150 минут и 0 ГБ.
Плата: $460 + 150 \cdot 2 + 0 \cdot 65 = 760$ руб.
Ответ: 760.

Задание 5

За месяц № 11 использовано 600 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $460 + 250 \cdot 2 + 0 \cdot 65 = 960$ руб.
«Расширенный»: $665 + 100 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 865$ руб.
Наименьшая плата — 865 руб.
Ответ: 865.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{8} - \dfrac{13}{20} = \dfrac{79}{40}$.
Умножаем на 2 и получаем $3{,}95$.
Ответ: $3{,}95$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{32}$ приблизительно равно $5{,}657$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$22 + 2 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 12$. Из равенства получаем $x - (12) = -\frac{7}{2}$.
$x = 8{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-28 \neq 0$.
Ответ: $8{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $13 + 35 + 2 = 50$. Благоприятных исходов 35, поэтому вероятность равна $\frac{35}{50} = 0{,}7$.
Ответ: $0{,}7$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{1}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{9{,}6 \cdot 16}{16 - 9{,}6} = 24$ Ом.
Ответ: 24.

Задание 13

Нули множителей: -11 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-11; 1]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 8 \cdot 2^4 = 128$.
Ответ: 128.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36^2 + 15^2 = 1521$. Длина положительна, поэтому $BC = 39$.
Ответ: 39.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{24 \cdot 20}{2} = 240$.

Ответ: 240.

Задание 18

Основание равно 5, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 5 \cdot 6 = 30$.

Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.

Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.

Утверждение 3 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.

Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+3) - 16(x+3) = 0$.

Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+3)(x^2-16) = (x+3)(x-4)(x+4) = 0$.

Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-4;\ -3;\ 4$.

Ответ: $-4;\ -3;\ 4$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 11 км/ч, второго 15 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками $46{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $11(t - \dfrac{1}{2}) + 15t = \dfrac{93}{2}$. Отсюда $26t = 52$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $15 \cdot 2 = 30$ км. Время движения первого $\dfrac{3}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.

Ответ: 30 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+2x-3)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

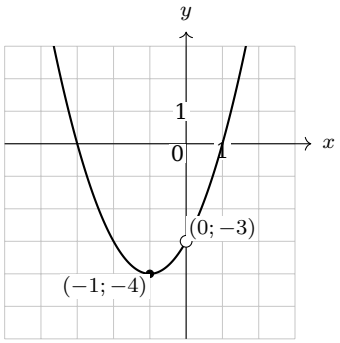
Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$.

Строим параболу с вершиной $(-1; -4)$ и выколотой точкой $(0; -3)$.

При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 4$, $AC = 12$, $NC = 7$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 7$. По подобию $\dfrac{x}{x+7} = \dfrac{4}{12}$.

Отсюда $12x = 4(x+7)$, то есть $8x = 28$. Получаем $BN = \dfrac{7}{2}$.

Ответ: $\dfrac{7}{2}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.

Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.

Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 13$, $BC = 10$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{50}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 13 - \dfrac{50}{13} = \dfrac{119}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 10 \cdot \dfrac{\frac{119}{13}}{13} = \dfrac{1190}{169}$.

Ответ: $\dfrac{1190}{169}$.