Решения. Вариант 18

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 1, А2 — размеры № 3, А4 — размеры № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

При переходе от А1 к А5 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны 21 см и $29{,}7$ см.
Площадь $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ см^2.
Ответ: 623,7.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 80 \cdot 250}{1000} = 1{,}2474$ кг.
После округления получаем $1{,}2$ кг.
Ответ: 1,2.

Задание 5

Всего нужно $655 \cdot 3 = 1965$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1965}{250} \right\rceil = 8$.
Стоимость: $8 \cdot 300 = 2400$ руб.
Ответ: 2400.

Задание 6

Сумма в скобках равна $13{,}9$.
$13{,}9 : 0{,}8 = 17{,}375$.
Ответ: 17,375.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{153}$ приблизительно равно $-12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{4 \cdot 2 - 5} = 4^3 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$8x = -100 - (0) = -100$, поэтому $x = -12{,}5$.
Ответ: $-12{,}5$.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 45$; их 5. Вероятность равна $\dfrac{5}{50} = 0{,}1$.

Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = -3x$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = 3x + 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 250}{10^2} = 5$ кг.

Ответ: 5.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -6$, второе — $x \le 3$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-6; 3]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{20} = -15 + (20-1) \cdot (2) = 23$.
Ответ: 23.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 51° - 36° = 93°$.
Ответ: 93.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 13 \cdot 7 = 91$.
Ответ: 91.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 7, поэтому площадь равна $4 \cdot 7 = 28$.
Ответ: 28.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{5}{x-12}+\frac{5}{x+12}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 12$ и $x \neq -12$.
Умножим уравнение на $(x-12)(x+12)$: $5(x+12)+5(x-12)=x^2-144$.
Получим $x^2-10x-144=0$, или $(x-5)^2=169=13^2$.
Поэтому $x=5-13=-8$ или $x=5+13=18$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-8;\ 18$.

Задание 21

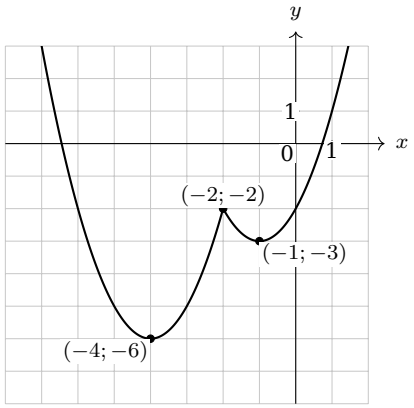
Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{15}{100}x+\frac{70}{100}(50-x)=\frac{40}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $15x+3500-70x=2000$. Поэтому $55x=1500$ и $x=\frac{300}{11}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{300}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 5x + 4 - 3|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t - 2$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -6)$ и $(1; -3)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -6$ пересечений нет; при $m = -6$ одно; при $-6 < m < -3$ два; при $m = -3$ три.
При $-3 < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -3$ или $m = -2$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 13, а основание равно 10. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \dfrac{169}{24}$.
Ответ: $\dfrac{169}{24}$.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 8$, $CD = 17$, основание $BC = 1$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 17 - 1 = 16$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 8$, $AP = BC = 1$, $PD = AD - BC = 15$.
В треугольнике CPD выполняется $8^2 + 15^2 = 17^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 8.
Площадь $S = \dfrac{16 + 1}{2} \cdot 8 = 68$.
Ответ: 68.