Решения. Вариант 21

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4; Журавушка — 1; Камышино — 3.
Ответ: 413.

Задание 2

Путь занимает $5 + 12 = 17$ клеток.
Длина пути равна $17 \cdot 1 = 17$ км.
Ответ: 17.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 5 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ км.
Ответ: 13.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\dfrac{11}{15} \cdot 60 + \dfrac{13}{10} \cdot 60 = 122$.
Ответ: 122.

Задание 5

Васильково: $2 \cdot 53 + 0{,}5 \cdot 645 + 1 \cdot 815 = 1243{,}5$ руб.
Иваново: $2 \cdot 60 + 0{,}5 \cdot 615 + 1 \cdot 800 = 1227{,}5$ руб.
Камышино: $2 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 600 + 1 \cdot 824 = 1224$ руб.
Журавушка: $2 \cdot 45 + 0{,}5 \cdot 624 + 1 \cdot 845 = 1247$ руб.
Наименьшая стоимость — 1224 руб.
Ответ: 1224.

Задание 6

Сумма в скобках равна $6{,}2$.
$6{,}2 : 0{,}5 = 12{,}4$.
Ответ: 12,4.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{260}$ приблизительно равно $-16{,}125$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{3 \cdot 2 - 4} = 3^2 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

$5x = 85{,}5 - (8) = 77{,}5$, поэтому $x = 15{,}5$.
Ответ: 15,5.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 18$; их 3. Вероятность равна $\dfrac{3}{20} = 0{,}15$.

Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{13{,}2 \cdot 22}{22 - 13{,}2} = 33$ Ом.

Ответ: 33.

Задание 13

Нули множителей: 1 и 9. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(1; 9)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{11} = -12 + (11-1) \cdot (-2) = -32$.
Ответ: -32.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 34° - 36° = 110°$.
Ответ: 110.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

Ответ: 18.

Задание 18

Основания равны 5 и 8, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{5+8}{2} \cdot 3 = 19{,}5$.

Ответ: $19{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Это свойство касательной к окружности.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-36}{x-1}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 1$. Разложим числитель: $x^2-36=(x-6)(x+6)$.
Критические точки: -6, 1, 6. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -6 и 6 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-6]\cup(1;6]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $3{,}2$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 12 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+12$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+12)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+12}=\dfrac{5}{16}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+12)=\dfrac{16}{5}(2x+12)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x=4$ и $x=-\dfrac{48}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$, поэтому время совместной работы равно $3{,}2$ ч.
Ответ: 4 ч.

Задание 22

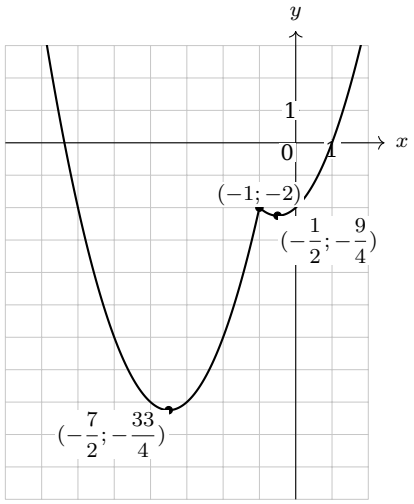
Постройте график функции $y = x^2 + 4x + 1 - 3|x + 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t - 2$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$ и $(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.

При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 7$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 12$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(5 + 12) = 34$.

Ответ: 34.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.

Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.

В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 5$, $BC = 8$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 8$ и $BH = AC = 5$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 5|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-5)^2 + 8^2$.

После раскрытия скобок получаем $10R = 89$. Поэтому $R = \dfrac{89}{10}$.

Ответ: $\dfrac{89}{10}$.