Решения. Вариант 23

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м^3 — печь № 2, 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 213.

Задание 2

$V = 3{,}2 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}1 = 18{,}816$ м^3.
Ответ: 18,816.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $30 : 2 = 15$ см и 20 см.
$R = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ см.
Ответ: 25.

Задание 4

После скидки остаётся 85% цены. Получаем $29200 \cdot \dfrac{85}{100} = 24820$ руб.
Ответ: 24820.

Задание 5

Объём парной равен $18{,}816$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $29200 + 800 = 30000$ руб.
Печь № 3: $24800 + 800 + 4800 = 30400$ руб.
Наименьшая сумма — 30000 руб.
Ответ: 30000.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{7}{4} - \dfrac{7}{5} = \dfrac{7}{20}$.
Умножаем на 3 и получаем $1{,}05$.
Ответ: 1,05.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{179}$ приблизительно равно $13{,}379$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$11 + 1 = 12$.
Ответ: 12.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -1$. Из равенства получаем $x - (-1) = -\dfrac{29}{2}$.
$x = -15{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-29 \neq 0$.
Ответ: $-15{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $23 + 22 + 5 = 50$. Благоприятных исходов 22, поэтому вероятность равна $\dfrac{22}{50} = 0{,}44$.
Ответ: $0{,}44$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 95$: $C = \dfrac{5}{9}(95 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (63) = 35$.
Ответ: 35.

Задание 13

$9 = 3^2$. Требуются числа, модуль которых больше 3.
Множество решений: $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 8 \cdot 3^5 = 1944$.
Ответ: 1944.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$. Длина положительна, поэтому $BC = 15$.
Ответ: 15.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $40 : 2 = 20$. Вторая сторона: $20 - 5 = 15$.
Площадь равна $5 \cdot 15 = 75$.
Ответ: 75.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 6 и 3, поэтому площадь равна $6 \cdot 3 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Утверждение 3 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{8}{x-15}+\frac{8}{x+15}=1$.
Область допустимых значений: $x \neq 15$ и $x \neq -15$.
Умножим уравнение на $(x-15)(x+15)$: $8(x+15)+8(x-15)=x^2-225$.
Получим $x^2-16x-225=0$, или $(x-8)^2=289=17^2$.
Поэтому $x = 8-17 = -9$ или $x = 8+17 = 25$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-9;\ 25$.

Задание 21

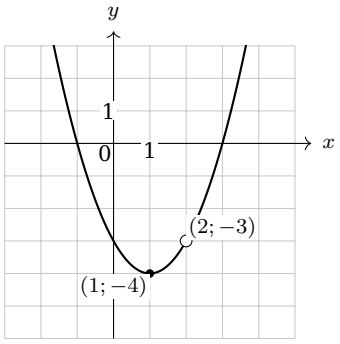
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{20}{100}x+\frac{75}{100}(50-x)=\frac{45}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $20x+3750-75x=2250$. Поэтому $55x=1500$ и $x=\frac{300}{11}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{300}{11}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2-2x-3)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$.
Строим параболу с вершиной $(1; -4)$ и выколотой точкой $(2; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17, а основание равно 16. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 15 = 120$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{17 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 120} = \dfrac{289}{30}$.
Ответ: $\dfrac{289}{30}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 15$, $CD = 17$, основание $BC = 4{,}5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 17 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{25}{2}$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 15$, $AP = BC = \dfrac{9}{2}$, $PD = AD - BC = 8$.

В треугольнике CPD выполняется $15^2 + 8^2 = 17^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 15.

Площадь $S = \dfrac{\dfrac{25}{2} + \dfrac{9}{2}}{2} \cdot 15 = \dfrac{255}{2}$.

Ответ: $\dfrac{255}{2}$.