Решения. Вариант 25

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А3 — размеры № 2, А5 — размеры № 1, А4 — размеры № 3.
Ответ: 213.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $1 \cdot 2^4 = 16$ листов.
Ответ: 16.

Задание 3

Размеры листа равны $14{,}8$ см и 21 см.
Площадь $14{,}8 \cdot 21 = 310{,}8$ см^2.
Ответ: 310,8.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}21 \cdot 0{,}297 = 0{,}06237$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}06237 \cdot 90 \cdot 400}{1000} = 2{,}24532$ кг.
После округления получаем $2{,}2$ кг.
Ответ: 2,2.

Задание 5

Всего нужно $690 \cdot 4 = 2760$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2760}{400} \right\rceil = 7$.
Стоимость: $7 \cdot 320 = 2240$ руб.
Ответ: 2240.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $25 - 4 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{135}{13}$ приблизительно равно $10{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $13 + 2\sqrt{195} + 15 - 2\sqrt{195} = 28$.
Ответ: 28.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 9)(x - 10) = 0$. Корни: -9 и 10.
Требуемый корень равен 10.
Ответ: 10.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 20 = 980$. Вероятность равна $\dfrac{980}{1000} = 0{,}98$.

Ответ: $0{,}98$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{3{,}6 \cdot 6}{6 - 3{,}6} = 9$ Ом.

Ответ: 9.

Задание 13

Нули множителей: -12 и -6. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-12; -6]$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 18-го ряда число мест увеличивается 17 раз: $21 + 17 \cdot 5 = 106$.
Ответ: 106.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$, поэтому каждый равен 34°.
Ответ: 34.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{8 \cdot 8}{2} = 32$.

Ответ: 32.

Задание 18

Основание занимает 4 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=0-x$. Подставим во второе: $x^2+(0-x)^2=2$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-1=0$.
Разложим на множители: $(x+1)(x-1)=0$. Следовательно, $x=-1$ или $x=1$.
При $x=-1$ первое уравнение даёт $y=1$; при $x=1$ получаем $y=-1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 0, сумма их квадратов равна 2.
Ответ: $(x;y)=(-1;1)$ или $(x;y)=(1;-1)$.

Задание 21

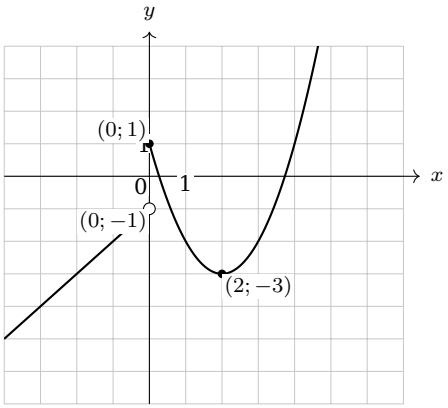
Моторная лодка прошла 40 км по течению реки и 36 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>4$. Скорости по течению и против течения равны $x+4$ и $x-4$.
Уравнение времени: $\dfrac{40}{x+4}+\dfrac{36}{x-4}=5$.
После умножения на $(x+4)(x-4)$ и приведения получаем $5x^2-76x-64=0$. Его корни: $x=16$ и $x=-\dfrac{4}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>4$. Для $x=16$ времена равны 2 ч и 3 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2-3, & x\geq 0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;-3)$, оставленная при $x\geq 0$. Точка $(0;1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x-1$ при $x<0$. Его конечная точка $(0;-1)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1\leq m\leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(0;1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-1\leq m\leq 1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD\parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF=8$, $BF=15$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A+\angle B=180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB+\angle FBA=90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB=90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB=\sqrt{AF^2+BF^2}=\sqrt{64+225}=17$.
Ответ: 17.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 7$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{7}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 7/\cos 60^\circ = 14$.

Ответ: 14.