Решения. Вариант 26

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 185, 195 мм. Наименьшая из них — 185 мм.
Ответ: 185.

Задание 2

$H = 175 \cdot \dfrac{55}{100} = 96{,}25$ мм.
Ответ: 96,25.

Задание 3

Диаметр диска: $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины: $185 \cdot \dfrac{60}{100} = 111$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 111 = 577{,}6$ мм.
Ответ: 577,6.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$185 \cdot \dfrac{55}{100} - 195 \cdot \dfrac{50}{100} = 4{,}25$ мм.
Ответ: 4,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 185 \cdot \dfrac{55}{100} = 584{,}5$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{584{,}5 - 577{,}6}{577{,}6} \cdot 100\% \approx 1{,}2\%$.
Ответ: 1,2.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{5}{4} - \dfrac{15}{4} = -\dfrac{5}{2}$.
Умножаем на 2 и получаем -5.
Ответ: -5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{302}$ приблизительно равно $17{,}378$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$7 + 1 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 7$. Из равенства получаем $x-(7)=\frac{17}{2}$.
$x = 15{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $17 \neq 0$.
Ответ: $15{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $15 + 19 + 6 = 40$. Благоприятных исходов 19, поэтому вероятность равна $\frac{19}{40} = 0{,}475$.
Ответ: $0{,}475$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{3}{x}$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \frac{2E}{v^2} = \frac{2 \cdot 171{,}5}{7^2} = 7$ кг.
Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -4$, второе — $x \leq 7$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-4; 7]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 6 \cdot 3^6 = 4374$.
Ответ: 4374.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 25$. Длина положительна, поэтому $BC = 5$.
Ответ: 5.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{24^2 + 45^2} = 51$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 51 : 2 = 25{,}5$.
Ответ: $25{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 25 \cdot 9 = 225$.
Ответ: 225.

Задание 18

Основания равны 4 и 8, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{4+8}{2} \cdot 5 = 30$.

Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Утверждение 3 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.

Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-49}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-49 = (x-7)(x+7)$.
Критические точки: -7, 1, 7. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -7 и 7 включаем, точку 1 исключаем.

Ответ: $(-\infty;-7] \cup (1;7]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $3{,}6$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 3 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

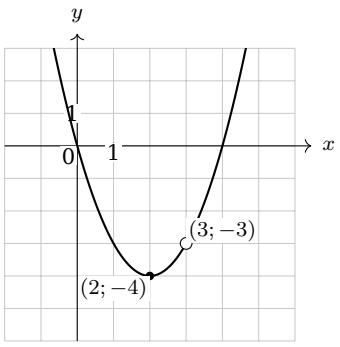
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+3$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+3)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{5}{18}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+3) = \dfrac{18}{5}(2x+3)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 6$ и $x = -\dfrac{9}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{5}{18}$, поэтому время совместной работы равно $3{,}6$ ч.

Ответ: 6 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-4x)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$. Строим параболу с вершиной $(2; -4)$ и выколотой точкой $(3; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 6$, $CK = 8$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 6$. Сторона $BC = BK + CK = 14$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(6 + 14) = 40$.
Ответ: 40.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, $BC = 4$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 4$ и $BH = AC = 6$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 6|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-6)^2 + 4^2$.

После раскрытия скобок получаем $12R = 52$. Поэтому $R = \dfrac{13}{3}$.

Ответ: $\dfrac{13}{3}$.