Решения. Вариант 28

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Камышино — 3; Васильково — 4; Иваново — 2.
Ответ: 342.

Задание 2

Путь занимает $16 + 12 = 28$ клеток.
Длина пути равна $28 \cdot 2 = 56$ км.
Ответ: 56.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 10 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ км.
Ответ: 26.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\dfrac{22}{16} \cdot 60 + \dfrac{26}{12} \cdot 60 = 212{,}5$.
Ответ: 212,5.

Задание 5

Васильково: $3 \cdot 61 + 1 \cdot 620 + 1 \cdot 807 = 1610$ руб.
Иваново: $3 \cdot 51 + 1 \cdot 605 + 1 \cdot 831 = 1589$ руб.
Камышино: $3 \cdot 46 + 1 \cdot 629 + 1 \cdot 852 = 1619$ руб.
Журавушка: $3 \cdot 54 + 1 \cdot 650 + 1 \cdot 822 = 1634$ руб.
Наименьшая стоимость — 1589 руб.
Ответ: 1589.

Задание 6

$(-7)^2 = 49$, $11^2 = 121$. Поэтому значение выражения равно $49 - 121 = -72$.
Ответ: -72.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{184}{13}$ приблизительно равно $14{,}154$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $7 + 2\sqrt{42} + 6 - 2\sqrt{42} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 3)(x - 4) = 0$. Корни: -3 и 4.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 24 = 476$. Вероятность равна $\dfrac{476}{500} = 0{,}952$.

Ответ: $0{,}952$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 120}{7+17} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 13

Получаем $4x > 24$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(6; +\infty)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 17-го ряда число мест увеличивается 16 раз: $14 + 16 \cdot 5 = 94$.
Ответ: 94.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, поэтому каждый равен 36°.
Ответ: 36.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 92^\circ : 2 = 46^\circ$.
Ответ: 46.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{17 + 12}{2} \cdot 7 = 101{,}5$.
Ответ: $101{,}5$.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 6, поэтому площадь равна $4 \cdot 6 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{6}{x-8}+\frac{6}{x+8}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 8$ и $x\neq -8$.
Умножим уравнение на $(x-8)(x+8)$: $6(x+8)+6(x-8)=x^2-64$.
Получим $x^2-12x-64=0$, или $(x-6)^2=100=10^2$.
Поэтому $x=6-10=-4$ или $x=6+10=16$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-4;\ 16$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 50 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $50-x$ кг, причём $0<x<50$.
Количество меди сохраняется: $\frac{25}{100}x+\frac{65}{100}(50-x)=\frac{50}{100}\cdot 50$.
Умножим на 100: $25x+3250-65x=2500$. Поэтому $40x=750$ и $x=\frac{75}{4}$.
Это число лежит между 0 и 50, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{75}{4}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x-3)^2 - 3, & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3; -3)$, оставленная при $x \geq 0$. Точка $(0; 6)$ входит в график.

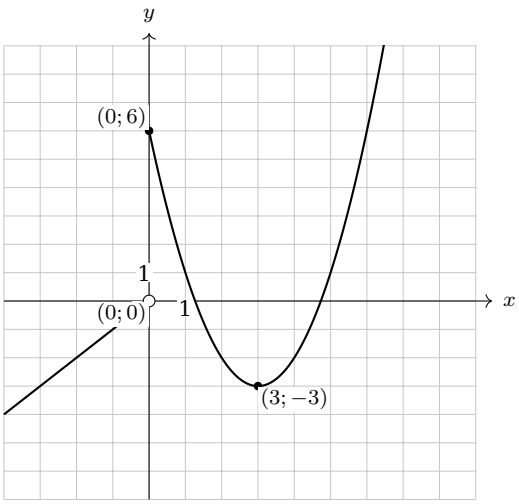
Вторая часть — луч прямой $y = x$ при $x < 0$. Его конечная точка $(0; 0)$ выколота.

При $m < -3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.

При $-3 < m < 0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.

При $0 \leq m \leq 6$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.

При $m > 6$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 6 включена, поскольку точка $(0; 6)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -3$ или $0 \leq m \leq 6$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, а основание равно 12. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \dfrac{25}{4}$.

Ответ: $\dfrac{25}{4}$.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 24$, $CD = 26$, основание $BC = 8$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 26 - 8 = 18$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 24$, $AP = BC = 8$, $PD = AD - BC = 10$.
В треугольнике CPD выполняется $24^2 + 10^2 = 26^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 24.
Площадь $S = \dfrac{18 + 8}{2} \cdot 24 = 312$.
Ответ: 312.