Решения. Вариант 29

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Озёрное — 3; Луговое — 2; Берёзовка — 4.
Ответ: 324.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $12 + 8 + 15 = 35$ км.
Ответ: 35.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 8 и 15 км.
Её длина $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ км.
Ответ: 17.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 12 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 17 км.
Время: $\dfrac{12}{60} \cdot 60 + \dfrac{17}{30} \cdot 60 = 46$ мин.
Ответ: 46.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{35 \cdot 8}{100} \cdot 61 = 170{,}8$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{25 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 61 = 144{,}875$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{12 \cdot 8 + 17 \cdot 9{,}5}{100} \cdot 61 = 157{,}075$ руб.

Наименьшая стоимость — $144{,}875$ руб.
Ответ: 144,875.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{11}{2} - 1 = \dfrac{9}{2}$.
Умножаем на 4 и получаем 18.
Ответ: 18.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{468}$ приблизительно равно $21{,}633$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$10 + 3 = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -2$.
$x = -7$. Это значение допустимо, так как числитель $-8 \neq 0$.
Ответ: -7.

Задание 10

Всего шаров $31 + 9 + 10 = 50$. Благоприятных исходов 9, поэтому вероятность равна $\frac{9}{50} = 0{,}18$.
Ответ: $0{,}18$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-1}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{12 \cdot 20}{20 - 12} = 30$ Ом.
Ответ: 30.

Задание 13

Нули множителей: -4 и 7. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-4; 7)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 6 \cdot 3^5 = 1458$.
Ответ: 1458.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. Длина положительна, поэтому $BC = 13$.
Ответ: 13.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{12 \cdot 18}{2} = 108$.

Ответ: 108.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.

Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 52x^2 + 576 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 52t + 576 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.

Ответ: $-6;\ -4;\ 4;\ 6$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 112 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

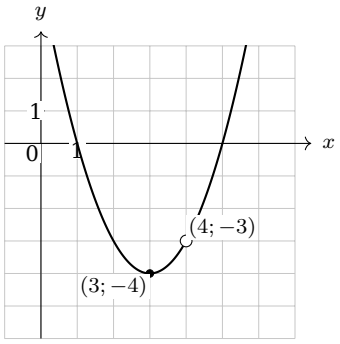
Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{112}{x} - \dfrac{112}{x+2} = 1$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $224 = 1x(x+2)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 14)(x + 16) = 0$.
Корень $x = -16$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 14 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.

Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-6x+5)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$.
Строим параболу с вершиной $(3; -4)$ и выколотой точкой $(4; -3)$.
При $m < -4$ общих точек нет. При $m = -4$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -4$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = -3$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -4$ или $m = -3$.



Ответ: $m = -4$ или $m = -3$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 50 и 18. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $50 + 18 = 68$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 68 \cdot 50$ и $v^2 = 68 \cdot 18$.
Поэтому $u = 10\sqrt{34}$, $v = 6\sqrt{34}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 68 + 16\sqrt{34}$.
Ответ: $68 + 16\sqrt{34}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 6$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{9}{2}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - \dfrac{9}{2} = \dfrac{7}{2}$.

Ответ: $\dfrac{7}{2}$.