Решения. Вариант 30

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3, 8 м^3 — печь № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

$V = 3{,}3 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}2 = 17{,}424$ м^3.
Ответ: 17,424.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $36 : 2 = 18$ см и 24 см.
$R = \sqrt{18^2 + 24^2} = 30$ см.
Ответ: 30.

Задание 4

После скидки остаётся 80% цены. Получаем $29800 \cdot \dfrac{80}{100} = 23840$ руб.
Ответ: 23840.

Задание 5

Объём парной равен $17{,}424$ м^3. Подходят печи № 1, 2, 3.
Печь № 1: $23500 + 850 = 24350$ руб.
Печь № 2: $29800 + 850 = 30650$ руб.
Печь № 3: $25200 + 850 + 4950 = 31000$ руб.
Наименьшая сумма — 24350 руб.
Ответ: 24350.

Задание 6

Сумма в скобках равна $7{,}4$.
$7{,}4 : 0{,}2 = 37$.
Ответ: 37.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{130}$ приблизительно равно $-11{,}402$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{2 \cdot 2 - 1} = 5^3 = 125$.
Ответ: 125.

Задание 9

$8x = -44 - (-4) = -40$, поэтому $x = -5$.
Ответ: -5.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 48$; их 16. Вероятность равна $\dfrac{16}{50} = 0{,}32$.

Ответ: $0{,}32$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 48}{4^2} = 6$ кг.

Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -11$, второе — $x \le 1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-11; 1]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{19} = 2 + (19-1) \cdot (7) = 128$.
Ответ: 128.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 39° - 61° = 80°$.
Ответ: 80.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 34 : 2 = 17$.
Ответ: 17.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 16 \cdot 3 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 18

Основание занимает 3 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Утверждение 3 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=2-x$. Подставим во второе: $x^2+(2-x)^2=4$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-2x=0$.
Разложим на множители: $(x)(x-2)=0$. Следовательно, $x=0$ или $x=2$.
При $x=0$ первое уравнение даёт $y=2$; при $x=2$ получаем $y=0$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 2, сумма их квадратов равна 4.
Ответ: $(x;y)=(0;2)$ или $(x;y)=(2;0)$.

Задание 21

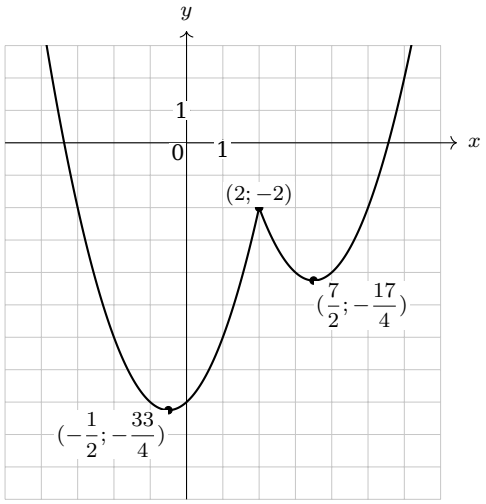
Моторная лодка прошла 46 км по течению реки и 13 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{46}{x+5}+\dfrac{13}{x-5}=3$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $3x^2-59x+90=0$. Его корни: $x=18$ и $x=\dfrac{5}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=18$ времена равны 2 ч и 1 ч, их сумма 3 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 3x - 4|x - 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t - 2$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{17}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.
При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{17}{4}$ два; при $m = -\frac{17}{4}$ три.
При $-\frac{17}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{17}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 6$, $BF = 8$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 8$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 4$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 8/\cos 30^\circ = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.