Решения. Вариант 31

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 3.
Ответ: 3.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{4+8+6+10}{4} = 7$ ГБ.
Ответ: 7.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 200 минут и 0 ГБ.
Плата: $480 + 200 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 880$ руб.
Ответ: 880.

Задание 5

За месяц № 1 использовано 250 минут и 12 ГБ.
«Основной»: $480 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 480$ руб.
«Расширенный»: $695 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 695$ руб.
Наименьшая плата — 480 руб.
Ответ: 480.

Задание 6

$(-6)^2 = 36$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $36 - 4 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{312}{17}$ приблизительно равно $18{,}353$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $2 + 2\sqrt{14} + 7 - 2\sqrt{14} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 9

Разложение на множители: $(x-6)(x-11) = 0$. Корни: 6 и 11.
Требуемый корень равен 11.
Ответ: 11.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 11 = 489$. Вероятность равна $\dfrac{489}{500} = 0{,}978$.

Ответ: $0{,}978$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Подставляем $F = 14$: $C = \dfrac{5}{9}(14 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-18) = -10$.

Ответ: -10.

Задание 13

$64 = 8^2$. Требуются числа, модуль которых больше 8.
Множество решений: $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 10-го ряда число мест увеличивается 9 раз: $17 + 9 \cdot 2 = 35$.
Ответ: 35.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$, поэтому каждый равен 49°.
Ответ: 49.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $36 : 2 = 18$. Вторая сторона: $18 - 11 = 7$.
Площадь равна $11 \cdot 7 = 77$.
Ответ: 77.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-64}{x-1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 1$. Разложим числитель: $x^2-64 = (x-8)(x+8)$.
Критические точки: -8, 1, 8. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -8 и 8 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-8]\cup(1;8]$.

Задание 21

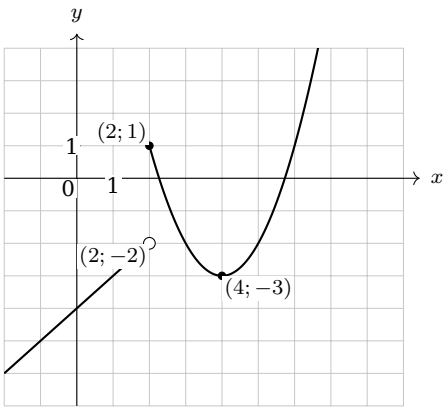
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 6 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 9 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+9$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+9)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+9} = \dfrac{1}{6}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+9) = 6(2x+9)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 9$ и $x = -6$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{6}$, поэтому время совместной работы равно 6 ч.
Ответ: 9 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-4)^2-3, & x\geq 2,\\ x-4, & x<2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(4;-3)$, оставленная при $x\geq 2$. Точка $(2;1)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x-4$ при $x<2$. Его конечная точка $(2;-2)$ выколота.
При $m<-3$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-3$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-3<m<-2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-2\leq m\leq 1$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>1$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 1 включена, поскольку точка $(2;1)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-3$ или $-2\leq m\leq 1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=7$, $CK=9$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=7$. Сторона $BC=BK+CK=16$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(7+16)=46$.
Ответ: 46.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO=\angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 7$, $BC = 6$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 6$ и $BH = AC = 7$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 7|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-7)^2 + 6^2$.

После раскрытия скобок получаем $14R = 85$. Поэтому $R = \dfrac{85}{14}$.

Ответ: $\dfrac{85}{14}$.