Решения. Вариант 36

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Журавушка — 1; Васильково — 4; Камышино — 3.
Ответ: 143.

Задание 2

Путь занимает 11 клеток.
Длина пути равна $11 \cdot 1 = 11$ км.
Ответ: 11.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 16 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ км.
Ответ: 20.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\frac{11}{20} \cdot 60 + \frac{13}{10} \cdot 60 = 111$.
Ответ: 111.

Задание 5

Васильково: $4 \cdot 52 + 1{,}5 \cdot 610 + 1 \cdot 838 = 1961$ руб.
Иваново: $4 \cdot 47 + 1{,}5 \cdot 634 + 1 \cdot 859 = 1998$ руб.
Камышино: $4 \cdot 55 + 1{,}5 \cdot 655 + 1 \cdot 829 = 2031{,}5$ руб.
Журавушка: $4 \cdot 62 + 1{,}5 \cdot 625 + 1 \cdot 814 = 1999{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — 1961 руб.
Ответ: 1961.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}3$.
$9{,}3 : 0{,}4 = 23{,}25$.
Ответ: 23,25.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{385}$ приблизительно равно $-19{,}621$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{3 \cdot 2 - 5} = 5^1 = 5$.
Ответ: 5.

Задание 9

$4x = 40 - (20) = 20$, поэтому $x = 5$.
Ответ: 5.

Задание 10

На 9 делятся числа $9, 18, \ldots, 18$; их 2. Вероятность равна $\dfrac{2}{20} = 0{,}1$.

Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -2x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -3x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 186}{5 + 26} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 13

Получаем $4x > 28$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(7; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{25} = 9 + (25 - 1) \cdot (1) = 33$.
Ответ: 33.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 37° - 31° = 112°$.
Ответ: 112.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 48° : 2 = 24°$.
Ответ: 24.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{17 + 8}{2} \cdot 9 = 112{,}5$.
Ответ: $112{,}5$.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 5 = 17{,}5$.

Ответ: $17{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-81}{x-1}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 1$. Разложим числитель: $x^2-81=(x-9)(x+9)$.
Критические точки: -9, 1, 9. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -9 и 9 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-9]\cup(1;9]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $4{,}8$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 18 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+18$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+18)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+18}=\dfrac{5}{24}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+18)=\dfrac{24}{5}(2x+18)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=6$ и $x=-\dfrac{72}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{5}{24}$, поэтому время совместной работы равно $4{,}8$ ч.
Ответ: 6 ч.

Задание 22

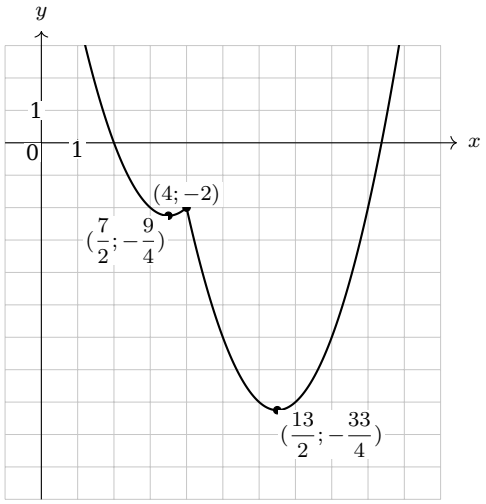
Постройте график функции $y = x^2 - 10x + 22 - 3|x - 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t - 2$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 2$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{33}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -2$.

При $m < -\frac{33}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{33}{4}$ одно; при $-\frac{33}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < -2$ пересечений четыре. При $m = -2$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -2$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = -2$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 10$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 8$. Сторона $BC = BK + CK = 18$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(8 + 18) = 52$.

Ответ: 52.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 8$, $BC = 11$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 11$ и $BH = AC = 8$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 8|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-8)^2 + 11^2$.

После раскрытия скобок получаем $16R = 185$. Поэтому $R = \dfrac{185}{16}$.

Ответ: $\dfrac{185}{16}$.