Решения. Вариант 37

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Берёзовка — 4; Озёрное — 1; Луговое — 2.
Ответ: 412.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $6 + 15 + 20 = 41$ км.
Ответ: 41.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 21 и 20 км.
Её длина $\sqrt{21^2 + 20^2} = 29$ км.
Ответ: 29.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 6 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 25 км.
Время: $\dfrac{6}{48} \cdot 60 + \dfrac{25}{24} \cdot 60 = 70$ мин.
Ответ: 70.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{41 \cdot 8{,}5}{100} \cdot 63 = 219{,}555$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{29 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 63 = 191{,}835$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{6 \cdot 8{,}5 + 25 \cdot 10{,}5}{100} \cdot 63 = 197{,}505$ руб.
Наименьшая стоимость — $191{,}835$ руб.
Ответ: 191,835.

Задание 6

$(-16)^2 = 256$, $2^2 = 4$. Поэтому значение выражения равно $256 - 4 = 252$.
Ответ: 252.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{122}{13}$ приблизительно равно $9{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{105} + 7 - 2\sqrt{105} = 22$.
Ответ: 22.

Задание 9

Разложение на множители: $(x - 3)(x - 11) = 0$. Корни: 3 и 11.
Требуемый корень равен 11.
Ответ: 11.

Задание 10

Исправных ламп $200 - 23 = 177$. Вероятность равна $\dfrac{177}{200} = 0{,}885$.

Ответ: $0{,}885$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{18 \cdot 30}{30 - 18} = 45$ Ом.

Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -10 и -1. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-10; -1)$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 14-го ряда число мест увеличивается 13 раз: $18 + 13 \cdot 5 = 83$.
Ответ: 83.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, поэтому каждый равен 60°.
Ответ: 60.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$.

Ответ: 30.

Задание 18

Основание равно 7, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 7 \cdot 3 = 21$.
Ответ: 21.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 16x - 32 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 16(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-16) = (x+2)(x-4)(x+4) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-4;\ -2;\ 4$.
Ответ: $-4;\ -2;\ 4$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 15 км/ч, второго 13 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками $44{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

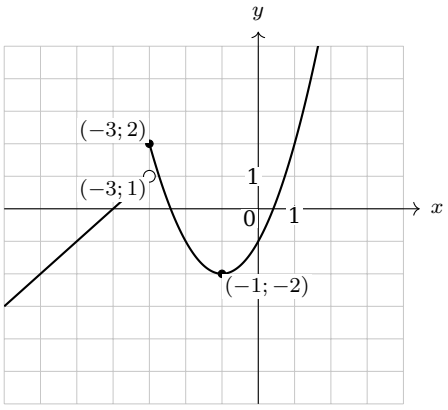
Сумма путей: $15(t - \dfrac{3}{4}) + 13t = \dfrac{179}{4}$. Отсюда $28t = 56$, то есть $t = 2$.

Второй велосипедист проехал $13 \cdot 2 = 26$ км. Время движения первого $\dfrac{5}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 26 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2-2, & x\geq -3,\\ x+4, & x<-3.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;-2)$, оставленная при $x\geq -3$. Точка $(-3;2)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+4$ при $x<-3$. Его конечная точка $(-3;1)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 2$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>2$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 2 включена, поскольку точка $(-3;2)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $1\leq m\leq 2$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=3$, $AC=12$, $NC=11$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+11$. По подобию $\dfrac{x}{x+11}=\dfrac{3}{12}$.

Отсюда $12x=3(x+11)$, то есть $9x=33$. Получаем $BN=\dfrac{11}{3}$.

Ответ: $\dfrac{11}{3}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 34$, $BC = 32$.
Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.
Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{256}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 34 - \dfrac{256}{17} = \dfrac{322}{17}$.
Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны.

Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 32 \cdot \dfrac{\frac{322}{17}}{34} = \dfrac{5152}{289}$.

Ответ: $\dfrac{5152}{289}$.