Решения. Вариант 38

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м^3 — печь № 3, 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 312.

Задание 2

$V = 3{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}2 = 18{,}7$ м^3.
Ответ: 18,7.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $42 : 2 = 21$ см и 28 см.
$R = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35$ см.
Ответ: 35.

Задание 4

После скидки остаётся 90% цены. Получаем $30400 \cdot \dfrac{90}{100} = 27360$ руб.
Ответ: 27360.

Задание 5

Объём парной равен $18{,}7$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $30400 + 900 = 31300$ руб.
Печь № 3: $25600 + 900 + 5100 = 31600$ руб.
Наименьшая сумма — 31300 руб.
Ответ: 31300.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{3}{10} - 1 = -\dfrac{7}{10}$.
Умножаем на 5 и получаем $-3{,}5$.
Ответ: $-3{,}5$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{260}$ приблизительно равно $16{,}125$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$7 + 3 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -8$. Из равенства получаем $x - (-8) = -\dfrac{27}{4}$.
$x = -14{,}75$. Это значение допустимо, так как числитель $-27 \neq 0$.
Ответ: $-14{,}75$.

Задание 10

Всего шаров $55 + 9 + 36 = 100$. Благоприятных исходов 9, поэтому вероятность равна $\dfrac{9}{100} = 0{,}09$.
Ответ: $0{,}09$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 405}{9^2} = 10$ кг.
Ответ: 10.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -8$, второе — $x \le 1$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-8; 1]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 8 \cdot 3^6 = 5832$.
Ответ: 5832.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 10^2 = 676$. Длина положительна, поэтому $BC = 26$.
Ответ: 26.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 13 : 2 = 6{,}5$.
Ответ: $6{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 16 \cdot 4 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 4, поэтому площадь равна $4 \cdot 4 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{16}{x-30}+\frac{16}{x+30}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 30$ и $x\neq -30$.
Умножим уравнение на $(x-30)(x+30)$: $16(x+30)+16(x-30)=x^2-900$.
Получим $x^2-32x-900=0$, или $(x-16)^2=1156=34^2$.
Поэтому $x=16-34=-18$ или $x=16+34=50$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-18;\ 50$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 10% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\frac{10}{100}x+\frac{75}{100}(60-x)=\frac{40}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $10x+4500-75x=2400$. Поэтому $65x=2100$ и $x=\frac{420}{13}$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\frac{420}{13}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2+2x-2)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

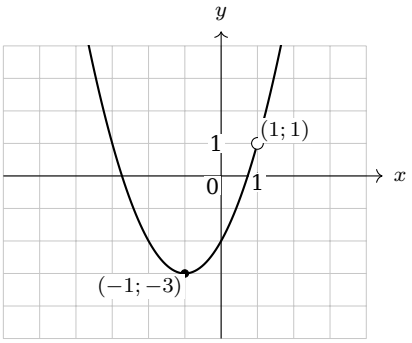
Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$.

Строим параболу с вершиной $(-1;-3)$ и выколотой точкой $(1;1)$.

При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 34, а основание равно 32. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 30 = 480$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{34 \cdot 34 \cdot 32}{4 \cdot 480} = \dfrac{289}{15}$.

Ответ: $\dfrac{289}{15}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.

Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.

Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.

В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 30$, $CD = 34$, основание $BC = 9$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 34 - 9 = 25$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 30$, $AP = BC = 9$, $PD = AD - BC = 16$.
В треугольнике CPD выполняется $30^2 + 16^2 = 34^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 30.
Площадь $S = \dfrac{25 + 9}{2} \cdot 30 = 510$.
Ответ: 510.