Решения. Вариант 40

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А4 — размеры № 2, А6 — размеры № 3, А2 — размеры № 1.
Ответ: 231.

Задание 2

При переходе от А1 к А5 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $2 \cdot 2^4 = 32$ листов.
Ответ: 32.

Задание 3

Размеры листа равны $29{,}7$ см и 42 см.
Площадь $29{,}7 \cdot 42 = 1247{,}4$ см^2.
Ответ: 1247,4.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 120 \cdot 500}{1000} = 1{,}8648$ кг.
После округления получаем $1{,}9$ кг.
Ответ: 1,9.

Задание 5

Всего нужно $760 \cdot 3 = 2280$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{2280}{500} \right\rceil = 5$.
Стоимость: $5 \cdot 360 = 1800$ руб.
Ответ: 1800.

Задание 6

$(-8)^2 = 64$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $64 - 16 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{171}{13}$ приблизительно равно $13{,}154$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $6 + 2\sqrt{60} + 10 - 2\sqrt{60} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 3)(x - 10) = 0$. Корни: -3 и 10.
Требуемый корень равен -3.
Ответ: -3.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 21 = 979$. Вероятность равна $\dfrac{979}{1000} = 0{,}979$.

Ответ: $0{,}979$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 1$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 87}{11 + 18} = 6$.

Ответ: 6.

Задание 13

Получаем $-5x \geq 5$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; -1]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 22-го ряда число мест увеличивается 21 раз: $22 + 21 \cdot 3 = 85$.

Ответ: 85.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, поэтому каждый равен 25°.

Ответ: 25.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 150^\circ : 2 = 75^\circ$.

Ответ: 75.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{27 + 10}{2} \cdot 9 = 166{,}5$.

Ответ: $166{,}5$.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 2 клеток. Площадь равна $\dfrac{8 \cdot 2}{2} = 8$.

Ответ: 8.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=6, \\ x^2+y^2=20. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=6-x$. Подставим во второе: $x^2+(6-x)^2=20$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-6x+8=0$.
Разложим на множители: $(x-2)(x-4)=0$. Следовательно, $x=2$ или $x=4$.
При $x=2$ первое уравнение даёт $y=4$; при $x=4$ получаем $y=2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 6, сумма их квадратов равна 20.
Ответ: $(x;y)=(2;4)$ или $(x;y)=(4;2)$.

Задание 21

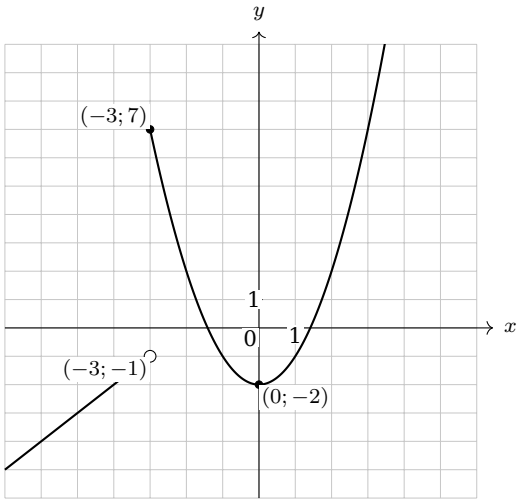
Моторная лодка прошла 50 км по течению реки и 57 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{50}{x+3}+\dfrac{57}{x-3}=5$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $5x^2-107x-66=0$. Его корни: $x=22$ и $x=-\dfrac{3}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=22$ времена равны 2 ч и 3 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 22 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x)^2 - 2, & x \geq -3, \\ x + 2, & x < -3. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0; -2)$, оставленная при $x \geq -3$. Точка $(-3; 7)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 2$ при $x < -3$. Его конечная точка $(-3; -1)$ выколота.
При $m < -2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2 < m < -1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1 \leq m \leq 7$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 7$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 7 включена, поскольку точка $(-3; 7)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -2$ или $-1 \leq m \leq 7$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 16$, $BF = 30$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{256 + 900} = 34$.
Ответ: 34.

Задание 24

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а M — середина гипотенузы AB. Докажите, что $CM = AB/2$.

Продолжим CM за M до точки D так, чтобы $MD = MC$. В четырёхугольнике $ACBD$ диагонали AB и CD пересекаются и делятся пополам, значит, это параллелограмм.
Его угол ACB прямой, поэтому этот параллелограмм является прямоугольником. Диагонали прямоугольника равны: $CD = AB$.
Так как M — середина CD, получаем $CM = CD/2 = AB/2$.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 5$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 10/\cos 60^\circ = 20$.
Ответ: 20.