Решения. Вариант 41

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 205, 215 мм. Наибольшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 195 \cdot \dfrac{60}{100} = 117$ мм.
Ответ: 117.

Задание 3

Диаметр диска: $16 \cdot 25{,}4 = 406{,}4$ мм.
Высота боковины: $205 \cdot \dfrac{60}{100} = 123$ мм.
$D = 406{,}4 + 2 \cdot 123 = 652{,}4$ мм.
Ответ: 652,4.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$205 \cdot \dfrac{55}{100} - 215 \cdot \dfrac{50}{100} = 5{,}25$ мм.
Ответ: 5,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $17 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 205 \cdot \dfrac{55}{100} = 657{,}3$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{657{,}3 - 652{,}4}{652{,}4} \cdot 100\% \approx 0{,}8\%$.
Ответ: 0,8.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $3 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{11}{4}$.
Умножаем на 2 и получаем 5,5.
Ответ: 5,5.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{436}$ приблизительно равно $20{,}881$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 1 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -10$. Из равенства получаем $x - (-10) = -\dfrac{11}{2}$.
$x = -15{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-22 \neq 0$.
Ответ: $-15{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $10 + 15 + 25 = 50$. Благоприятных исходов 15, поэтому вероятность равна $\dfrac{15}{50} = 0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{8{,}4 \cdot 14}{14 - 8{,}4} = 21$ Ом.
Ответ: 21.

Задание 13

Нули множителей: -3 и 0. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-3; 0]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 7 \cdot 2^6 = 448$.
Ответ: 448.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{10 \cdot 8}{2} = 40$.

Ответ: 40.

Задание 18

Основания равны 2 и 5, высота равна 3. Площадь $S = \dfrac{2+5}{2} \cdot 3 = 10{,}5$.

Ответ: $10{,}5$.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 3 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2 - 100}{x - 1} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 1$. Разложим числитель: $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$.
Критические точки: -10, 1, 10. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -10 и 10 включаем, точку 1 исключаем.
Ответ: $(-\infty; -10] \cup (1; 10]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $4{,}8$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 4 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x + 4$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+4)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+4} = \dfrac{5}{24}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+4) = \dfrac{24}{5}(2x+4)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 8$ и $x = -\dfrac{12}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

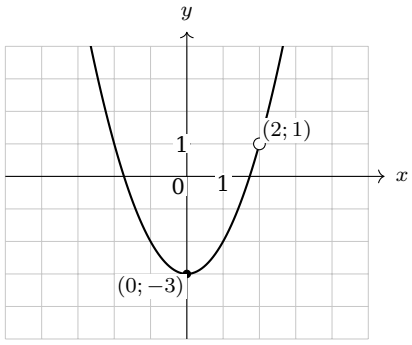
Проверка: $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{5}{24}$, поэтому время совместной работы равно $4{,}8$ ч.

Ответ: 8 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2-3)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(0; -3)$ и выколотой точкой $(2; 1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 9$, $CK = 11$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 9$. Сторона $BC = BK + CK = 20$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(9 + 20) = 58$.
Ответ: 58.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 5$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 5$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 5^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 34$. Поэтому $R = \dfrac{17}{3}$.

Ответ: $\dfrac{17}{3}$.