Решения. Вариант 43

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

коридор — 2; санузел — 1; гостиная — 6; кухня — 7.
Ответ: 2167.

Задание 2

Пол спальни занимает 99 клеток, его площадь $99 \cdot 0{,}5^2 = 24{,}75$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ м^2. Требуется $24{,}75 : 0{,}25 = 99$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{99}{12} \right\rceil = 9$ целых упаковок.
Ответ: 9.

Задание 3

На плане помещение занимает 90 клеток.
Его площадь $90 \cdot 0{,}5^2 = 22{,}5$ м^2.
Ответ: 22,5.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 156 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{156 - 30}{30} \cdot 100\% = 420\%$.
Ответ: 420.

Задание 5

Тариф «А»: $380 + 18 \cdot 50 = 1280$ руб.
Тариф «Б»: $530 + 8 \cdot 35 = 810$ руб.
Безлимитный тариф стоит 795 руб. Наименьшая плата — 795 руб.
Ответ: 795.

Задание 6

$(-12)^2 = 144$, $7^2 = 49$. Поэтому значение выражения равно $144 - 49 = 95$.
Ответ: 95.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{191}{11}$ приблизительно равно $17{,}364$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $17 + 2\sqrt{255} + 15 - 2\sqrt{255} = 32$.
Ответ: 32.

Задание 9

Разложение на множители: $(x - 4)(x - 5) = 0$. Корни: 4 и 5.
Требуемый корень равен 5.
Ответ: 5.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 13 = 487$. Вероятность равна $\frac{487}{500} = 0{,}974$.
Ответ: $0{,}974$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 + 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 41$: $C = \frac{5}{9}(41 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (9) = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

$169 = 13^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 13.
Множество решений: $(-\infty; -13] \cup [13; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $14 + 20 \cdot 3 = 74$.
Ответ: 74.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 124^\circ = 56^\circ$, поэтому каждый равен 28°.
Ответ: 28.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 16 : 2 = 8$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52 : 2 = 26$. Вторая сторона: $26 - 14 = 12$.
Площадь равна $14 \cdot 12 = 168$.
Ответ: 168.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 6 и 5, поэтому площадь равна $6 \cdot 5 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{9}{x-12}+\dfrac{9}{x+12}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 12$ и $x\neq -12$.
Умножим уравнение на $(x-12)(x+12)$: $9(x+12)+9(x-12)=x^2-144$.
Получим $x^2-18x-144=0$, или $(x-9)^2=225=15^2$.
Поэтому $x=9-15=-6$ или $x=9+15=24$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-6;\ 24$.

Задание 21

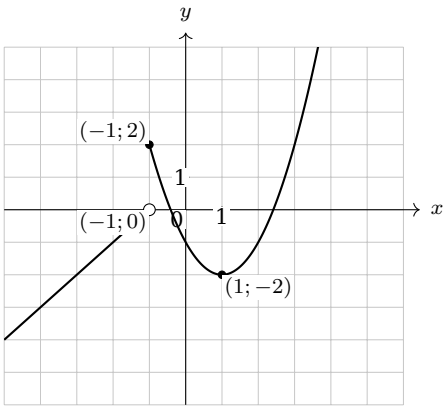
Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 45% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{15}{100}x+\dfrac{65}{100}(60-x)=\dfrac{45}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $15x+3900-65x=2700$. Поэтому $50x=1200$ и $x=24$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 24 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-1)^2-2, & x\geq -1,\\ x+1, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(1;-2)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;2)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+1$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;0)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 2$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>2$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 2 включена, поскольку точка $(-1;2)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $0\leq m\leq 2$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 15, а основание равно 18. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{15 \cdot 15 \cdot 18}{4 \cdot 108} = \dfrac{75}{8}$.

Ответ: $\dfrac{75}{8}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.

У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.

Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 36$, $CD = 39$, основание $BC = 12$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 39 - 12 = 27$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 36$, $AP = BC = 12$, $PD = AD - BC = 15$.

В треугольнике CPD выполняется $36^2 + 15^2 = 39^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 36.

Площадь $S = \dfrac{27 + 12}{2} \cdot 36 = 702$.

Ответ: 702.