Решения. Вариант 44

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Журавушка — 1; Иваново — 2; Камышино — 3.
Ответ: 123.

Задание 2

Путь занимает 16 клеток.
Длина пути равна $16 \cdot 2 = 32$ км.
Ответ: 32.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 32 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ км.
Ответ: 40.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\frac{22}{20} \cdot 60 + \frac{26}{12} \cdot 60 = 196$.
Ответ: 196.

Задание 5

Васильково: $5 \cdot 48 + 0{,}5 \cdot 639 + 2 \cdot 866 = 2291{,}5$ руб.
Иваново: $5 \cdot 56 + 0{,}5 \cdot 660 + 2 \cdot 836 = 2282$ руб.
Камышино: $5 \cdot 63 + 0{,}5 \cdot 630 + 2 \cdot 821 = 2272$ руб.
Журавушка: $5 \cdot 53 + 0{,}5 \cdot 615 + 2 \cdot 845 = 2262{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — 2262,5 руб.
Ответ: 2262,5.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{22}{5} - \frac{3}{2} = \frac{29}{10}$.
Умножаем на 4 и получаем 11,6.
Ответ: 11,6.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{62}$ приблизительно равно 7,874. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$4 + 2 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = -12$.
$x = 3$. Это значение допустимо, так как числитель $-24 \neq 0$.
Ответ: 3.

Задание 10

Всего шаров $3 + 11 + 6 = 20$. Благоприятных исходов 11, поэтому вероятность равна $\dfrac{11}{20} = 0{,}55$.
Ответ: $0{,}55$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 1)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a + b} = \dfrac{2 \cdot 216}{9 + 18} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 13

Получаем $4x > 8$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(2; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 9 \cdot 3^3 = 243$.
Ответ: 243.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 60^2 + 32^2 = 4624$. Длина положительна, поэтому $BC = 68$.
Ответ: 68.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 130^\circ : 2 = 65^\circ$.
Ответ: 65.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{15 + 10}{2} \cdot 5 = 62{,}5$.
Ответ: $62{,}5$.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 12 и 5. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.
Ответ: 13.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 2 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 3 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 45x^2 + 324 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 45t + 324 = 0$, то есть $(t - 9)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 9$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 9$ получаем $x = \pm 3$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.
Ответ: $-6;\ -3;\ 3;\ 6$.

Задание 21

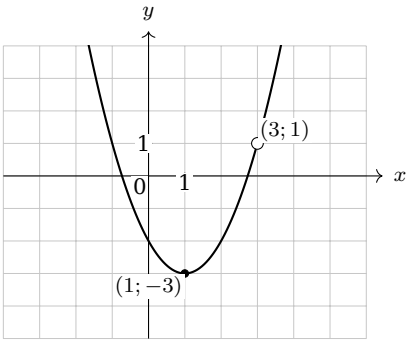
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 60 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 1 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{60}{x} - \dfrac{60}{x+2} = 1$. Умножив на $x(x+2)$, получаем $120 = 1x(x+2)$.
После деления на 1 и разложения: $(x - 10)(x + 12) = 0$.
Корень $x = -12$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 10 км/ч. Разность времён действительно равна 1 ч.
Ответ: 10 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-2x-2)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(1;-3)$ и выколотой точкой $(3;1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 9 и 16. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $9 + 16 = 25$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 25{\cdot}9$ и $v^2 = 25{\cdot}16$.
Поэтому $u = 15$, $v = 20$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 60$.
Ответ: 60.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 6$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 6 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$.
Ответ: $\dfrac{9}{2}$.