Решения. Вариант 45

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Луговое — 2; Берёзовка — 1; Сосновка — 4.
Ответ: 214.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $11 + 7 + 24 = 42$ км.
Ответ: 42.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 7 и 24 км.
Её длина $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ км.
Ответ: 25.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 11 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 25 км.
Время: $\dfrac{11}{100} \cdot 60 + \dfrac{25}{50} \cdot 60 = 36{,}6$ мин.
Ответ: 36,6.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{42 \cdot 9}{100} \cdot 65 = 245{,}7$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{30 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 65 = 224{,}25$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{11 \cdot 9 + 25 \cdot 11{,}5}{100} \cdot 65 = 251{,}225$ руб.
Наименьшая стоимость — $224{,}25$ руб.
Ответ: 224,25.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}9$.
$11{,}9 : 0{,}2 = 59{,}5$.
Ответ: 59,5.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{207}$ приблизительно равно $-14{,}387$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $3^{2 \cdot 2 - 1} = 3^3 = 27$.
Ответ: 27.

Задание 9

$4x = 62 - (-4) = 66$, поэтому $x = 16{,}5$.
Ответ: 16,5.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 40$; их 5. Вероятность равна $\frac{5}{40} = 0{,}125$.
Ответ: $0{,}125$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = -2x$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = 2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = -x + 2$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{2{,}4 \cdot 4}{4 - 2{,}4} = 6$ Ом.
Ответ: 6.

Задание 13

Нули множителей: 2 и 6. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(2; 6)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{17} = -19 + (17 - 1) \cdot (-7) = -131$.
Ответ: -131.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 39° - 61° = 80°$.
Ответ: 80.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.
Ответ: 12.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{12 \cdot 16}{2} = 96$.
Ответ: 96.

Задание 18

Основание занимает 8 клеток, высота — 2 клеток. Площадь равна $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=8, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=8-x$. Подставим во второе: $x^2+(8-x)^2=34$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-8x+15=0$.
Разложим на множители: $(x-3)(x-5)=0$. Следовательно, $x=3$ или $x=5$.
При $x=3$ первое уравнение даёт $y=5$; при $x=5$ получаем $y=3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 8, сумма их квадратов равна 34.
Ответ: $(x;y)=(3;5)$ или $(x;y)=(5;3)$.

Задание 21

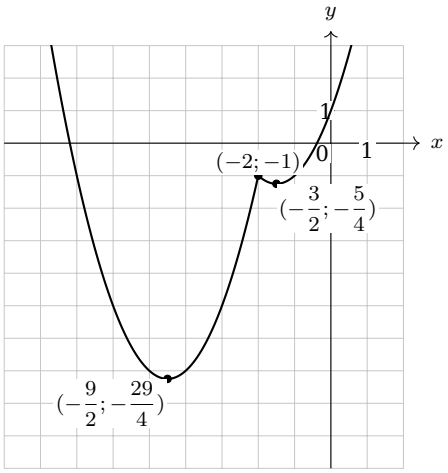
Моторная лодка прошла 56 км по течению реки и 20 км против течения, затратив на весь путь 3 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>4$. Скорости по течению и против течения равны $x+4$ и $x-4$.
Уравнение времени: $\dfrac{56}{x+4}+\dfrac{20}{x-4}=3$.
После умножения на $(x+4)(x-4)$ и приведения получаем $3x^2-76x+96=0$. Его корни: $x=24$ и $x=\dfrac{4}{3}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>4$. Для $x=24$ времена равны 2 ч и 1 ч, их сумма 3 ч.
Ответ: 24 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 6x + 7 - 3|x + 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t - 1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$ и $(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.
При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{5}{4}$ два; при $m = -\frac{5}{4}$ три.
При $-\frac{5}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{5}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 9$, $BF = 12$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$.
Ответ: 15.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 11$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{11}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 11/\cos 30^\circ = \dfrac{22\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{22\sqrt{3}}{3}$.