Решения. Вариант 46

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 14 м³ — печь № 3, 12 м³ — печь № 2, 8 м³ — печь № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

$V = 3{,}5 \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}2 = 21{,}56$ м³.
Ответ: 21,56.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $48 : 2 = 24$ см и 32 см.
$R = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40$ см.
Ответ: 40.

Задание 4

После скидки остаётся 88% цены. Получаем $31000 \cdot \dfrac{88}{100} = 27280$ руб.
Ответ: 27280.

Задание 5

Объём парной равен $21{,}56$ м³. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $31000 + 950 = 31950$ руб.
Печь № 3: $26000 + 950 + 5250 = 32200$ руб.
Наименьшая сумма — 31950 руб.
Ответ: 31950.

Задание 6

$(-13)^2 = 169$, $6^2 = 36$. Поэтому значение выражения равно $169 - 36 = 133$.
Ответ: 133.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{150}{7}$ приблизительно равно $21{,}429$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $3 + 2\sqrt{15} + 5 - 2\sqrt{15} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 11)(x + 9) = 0$. Корни: -11 и -9.
Требуемый корень равен -11.
Ответ: -11.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 3 = 997$. Вероятность равна $\dfrac{997}{1000} = 0{,}997$.

Ответ: $0{,}997$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 576}{12^2} = 8$ кг.

Ответ: 8.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -4$, второе — $x \le 7$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-4;7]$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 18-го ряда число мест увеличивается 17 раз: $21 + 17 \cdot 4 = 89$.
Ответ: 89.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$, поэтому каждый равен 44°.
Ответ: 44.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 5 : 2 = 2{,}5$.
Ответ: $2{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 16 \cdot 9 = 144$.
Ответ: 144.

Задание 18

Основания равны 2 и 8, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{2+8}{2} \cdot 2 = 10$.

Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-16}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-16 = (x-4)(x+4)$.
Критические точки: -4, 2, 4. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -4 и 4 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-4]\cup(2;4]$.

Задание 21

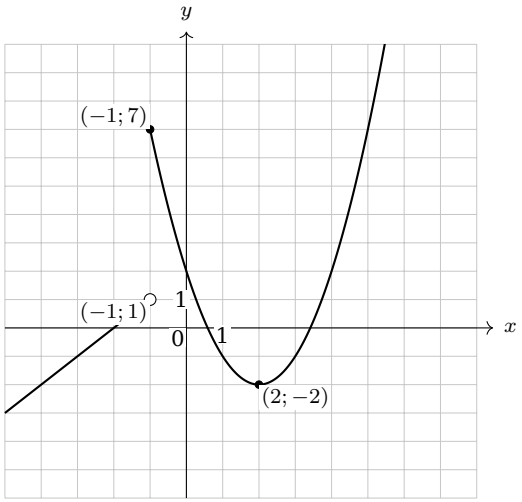
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 8 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 12 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+12$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+12)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+12}=\dfrac{1}{8}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+12)=8(2x+12)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=12$ и $x=-8$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{1}{8}$, поэтому время совместной работы равно 8 ч.
Ответ: 12 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2-2, & x\geq -1,\\ x+2, & x<-1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;-2)$, оставленная при $x\geq -1$. Точка $(-1;7)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+2$ при $x<-1$. Его конечная точка $(-1;1)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 7$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>7$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 7 включена, поскольку точка $(-1;7)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $1\leq m\leq 7$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=3$, $CK=12$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB=BK=3$. Сторона $BC=BK+CK=15$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(3+15)=36$.
Ответ: 36.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 4$, $BC = 7$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 7$ и $BH = AC = 4$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 4|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-4)^2 + 7^2$.

После раскрытия скобок получаем $8R = 65$. Поэтому $R = \dfrac{65}{8}$.

Ответ: $\dfrac{65}{8}$.