Решения. Вариант 47

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 9.
Ответ: 9.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 2, 3, 5, 7.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{18+12+20+22}{4}=18$ ГБ.
Ответ: 18.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 500 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 100 минут и 2 ГБ.
Плата: $500+100\cdot 2+2\cdot 70=840$ руб.
Ответ: 840.

Задание 5

За месяц № 4 использовано 300 минут и 8 ГБ.
«Основной»: $500+0\cdot 2+0\cdot 70=500$ руб.
«Расширенный»: $725+0\cdot 2+0\cdot 50=725$ руб.
Наименьшая плата — 500 руб.
Ответ: 500.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{20}$.
Умножаем на 5 и получаем $2{,}75$.
Ответ: $2{,}75$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{130}$ приблизительно равно $11{,}402$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$14+2=16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = \frac{5}{4}$.
$x = 16{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $5 \neq 0$.
Ответ: $16{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $71 + 10 + 19 = 100$. Благоприятных исходов 10, поэтому вероятность равна $\frac{10}{100} = 0{,}1$.
Ответ: $0{,}1$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{2}{x}$.
Ответ: 321.

Задание 12

Подставляем $F = 14$: $C = \frac{5}{9}(14 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (-18) = -10$.
Ответ: -10.

Задание 13

$169 = 13^2$. Требуются числа, модуль которых больше 13.
Множество решений: $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_5 = 6 \cdot 3^4 = 486$.
Ответ: 486.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 30^2 + 16^2 = 1156$. Длина положительна, поэтому $BC = 34$.
Ответ: 34.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 90 : 2 = 45$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{51^2 - 45^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $58 : 2 = 29$. Вторая сторона: $29 - 14 = 15$.
Площадь равна $14 \cdot 15 = 210$.
Ответ: 210.

Задание 18

Основание равно 5, высота равна 3. Площадь параллелограмма $S = 5 \cdot 3 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - 36x - 144 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+4) - 36(x+4) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+4)(x^2-36) = (x+4)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -4;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -4;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 11 км/ч, второго 12 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками $63{,}5$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

Сумма путей: $11(t - \frac{1}{2}) + 12t = \frac{127}{2}$. Отсюда $23t = 69$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $12 \cdot 3 = 36$ км. Время движения первого $\frac{5}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 36 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-4x+1)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

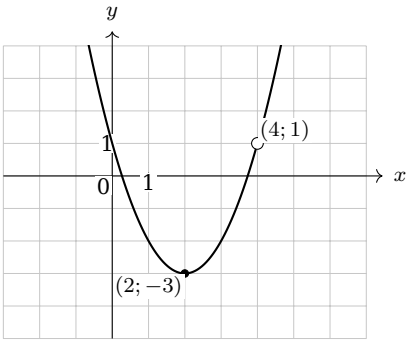
Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$.

Строим параболу с вершиной $(2; -3)$ и выколотой точкой $(4; 1)$.

При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.

При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.

Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 5$, $AC = 15$, $NC = 13$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 13$. По подобию $\dfrac{x}{x+13} = \dfrac{5}{15}$.

Отсюда $15x = 5(x+13)$, то есть $10x = 65$. Получаем $BN = \dfrac{13}{2}$.

Ответ: $\dfrac{13}{2}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.

На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 39$, $BC = 30$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{150}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 39 - \dfrac{150}{13} = \dfrac{357}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 30 \cdot \dfrac{\frac{357}{13}}{39} = \dfrac{3570}{169}$.

Ответ: $\dfrac{3570}{169}$.