Решения. Вариант 48

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А5 — размеры № 3, А3 — размеры № 2, А4 — размеры № 1.
Ответ: 321.

Задание 2

При переходе от А2 к А6 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $2 \cdot 2^4 = 32$ листов.
Ответ: 32.

Задание 3

Размеры листа равны 21 см и $29{,}7$ см.
Площадь $21 \cdot 29{,}7 = 623{,}7$ см^2.
Ответ: 623,7.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}148 \cdot 0{,}21 = 0{,}03108$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}03108 \cdot 70 \cdot 500}{1000} = 1{,}0878$ кг.
После округления получаем $1{,}1$ кг.
Ответ: 1,1.

Задание 5

Всего нужно $795 \cdot 4 = 3180$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{3180}{500} \right\rceil = 7$.
Стоимость: $7 \cdot 380 = 2660$ руб.
Ответ: 2660.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}6$.
$9{,}6 : 0{,}5 = 19{,}2$.
Ответ: 19,2.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{338}$ приблизительно равно $-18{,}385$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{2 \cdot 2 - 1} = 2^3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

$4x = -33 - (5) = -38$, поэтому $x = -9{,}5$.
Ответ: $-9{,}5$.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 36$; их 6. Вероятность равна $\dfrac{6}{40} = 0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 2, $y = -x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = 2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = x$.
Ответ: 213.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 72{,}5}{4+25} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 13

Получаем $-3x \geq -30$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 10]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{11} = -13 + (11-1) \cdot (-2) = -33$.
Ответ: -33.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 36° - 70° = 74°$.
Ответ: 74.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 142° : 2 = 71°$.
Ответ: 71.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{15+9}{2} \cdot 7 = 84$.
Ответ: 84.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 8 и 3, поэтому площадь равна $8 \cdot 3 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Утверждение 2 неверно. Для невырожденного треугольника сумма двух сторон строго больше третьей стороны.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{15}{x-36}+\dfrac{15}{x+36}=1$.

Область допустимых значений: $x\neq 36$ и $x\neq -36$.
Умножим уравнение на $(x-36)(x+36)$: $15(x+36)+15(x-36)=x^2-1296$.
Получим $x^2-30x-1296=0$, или $(x-15)^2=1521=39^2$.
Поэтому $x=15-39=-24$ или $x=15+39=54$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-24;\ 54$.

Задание 21

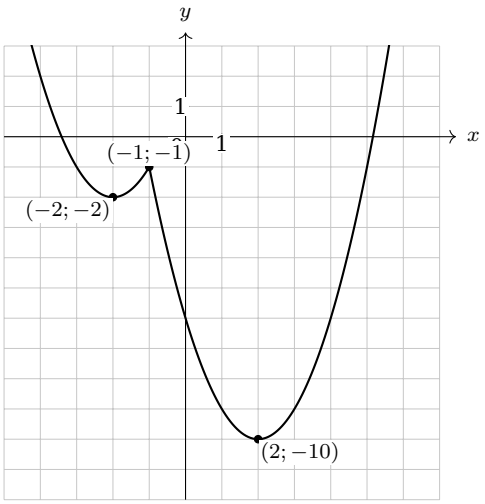
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 70%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 60 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $60-x$ кг, причём $0<x<60$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{20}{100}x+\dfrac{70}{100}(60-x)=\dfrac{50}{100}\cdot 60$.
Умножим на 100: $20x+4200-70x=3000$. Поэтому $50x=1200$ и $x=24$.
Это число лежит между 0 и 60, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 24 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=x^2-2-4|x+1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t=x+1$. При $t<0$ получаем $y=t^2+2t-1$, при $t\geq 0$ — $y=t^2-6t-1$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-1;-2)$ и $(3;-10)$. В точке $t=0$ обе части дают $y=-1$.
При $m<-10$ пересечений нет; при $m=-10$ одно; при $-10<m<-2$ два; при $m=-2$ три.
При $-2<m<-1$ пересечений четыре. При $m=-1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m>-1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m=-2$ или $m=-1$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 39, а основание равно 30. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$.

Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 30 \cdot 36 = 540$.

По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{39 \cdot 39 \cdot 30}{4 \cdot 540} = \dfrac{169}{8}$.

Ответ: $\dfrac{169}{8}$.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.

Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.

Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 24$, $CD = 51$, основание $BC = 3$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 51 - 3 = 48$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 24$, $AP = BC = 3$, $PD = AD - BC = 45$.

В треугольнике CPD выполняется $24^2 + 45^2 = 51^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 24.

Площадь $S = \dfrac{48 + 3}{2} \cdot 24 = 612$.

Ответ: 612.