Решения. Вариант 49

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 215, 225, 235 мм. Наименьшая из них — 215 мм.
Ответ: 215.

Задание 2

$H = 205 \cdot \dfrac{65}{100} = 133{,}25$ мм.
Ответ: 133,25.

Задание 3

Диаметр диска: $13 \cdot 25{,}4 = 330{,}2$ мм.
Высота боковины: $215 \cdot \dfrac{60}{100} = 129$ мм.
$D = 330{,}2 + 2 \cdot 129 = 588{,}2$ мм.
Ответ: 588,2.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$215 \cdot \dfrac{55}{100} - 225 \cdot \dfrac{50}{100} = 5{,}75$ мм.
Ответ: 5,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $14 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 215 \cdot \dfrac{55}{100} = 592{,}1$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{592{,}1 - 588{,}2}{588{,}2} \cdot 100\% \approx 0{,}7\%$.
Ответ: 0,7.

Задание 6

$(-14)^2 = 196$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $196 - 16 = 180$.
Ответ: 180.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{59}{7}$ приблизительно равно $8{,}429$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $15 + 2\sqrt{150} + 10 - 2\sqrt{150} = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+3)(x+2)=0$. Корни: -3 и -2.
Требуемый корень равен -2.
Ответ: -2.

Задание 10

Исправных ламп $200-8=192$. Вероятность равна $\dfrac{192}{200}=0{,}96$.
Ответ: $0{,}96$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y=x^2-1$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Из формулы $R(R_1+R_2)=R_1R_2$ получаем $R_2=\dfrac{RR_1}{R_1-R}$.
$R_2=\dfrac{18\cdot 30}{30-18}=45$ Ом.
Ответ: 45.

Задание 13

Нули множителей: -10 и -7. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-10;-7]$.
Ответ: 3.

Задание 14

От первого до 21-го ряда число мест увеличивается 20 раз: $22+20\cdot 4=102$.
Ответ: 102.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-112^\circ=68^\circ$, поэтому каждый равен 34°.
Ответ: 34.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT=\sqrt{OP^2-OT^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S=\dfrac{24\cdot 16}{2}=192$.
Ответ: 192.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 65x^2 + 784 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 65t + 784 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 49) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 49$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 49$ — $x = \pm 7$.
Ответ: $-7;\ -4;\ 4;\ 7$.

Задание 21

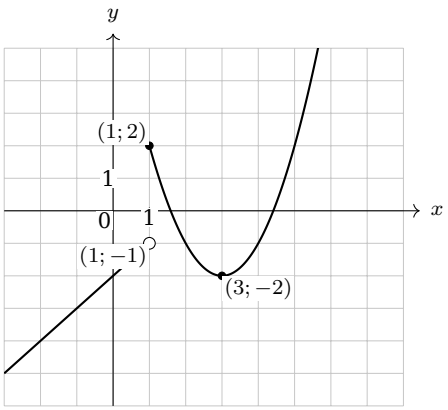
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 252 км. Скорость первого на 3 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 3$ км/ч.
По условию $\dfrac{252}{x} - \dfrac{252}{x+3} = 2$. Умножив на $x(x+3)$, получаем $756 = 2x(x+3)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 18)(x + 21) = 0$.
Корень $x = -21$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 18 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-3)^2-2, & x\geq 1,\\ x-2, & x<1.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(3;-2)$, оставленная при $x\geq 1$. Точка $(1;2)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x-2$ при $x<1$. Его конечная точка $(1;-1)$ выколота.
При $m<-2$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-2$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-2<m<-1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $-1\leq m\leq 2$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>2$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 2 включена, поскольку точка $(1;2)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-2$ или $-1\leq m\leq 2$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 32 и 32. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $32+32=64$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2=64\cdot 32$ и $v^2=64\cdot 32$.
Поэтому $u=32\sqrt{2}$, $v=32\sqrt{2}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P=64+64\sqrt{2}$.
Ответ: $64+64\sqrt{2}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ - \angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1 = CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 7$, $MD = 4$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 16$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{16}{7} = \dfrac{16}{7}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 7 - \dfrac{16}{7} = \dfrac{33}{7}$.
Ответ: $\dfrac{33}{7}$.