Решения. Вариант 50

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

сарай — 4; теплица — 1; баня — 6; яблони — 5.
Ответ: 4165.

Задание 2

Дорожки занимают $10 + 6 + 12 - 2 = 26$ м^2: два пересечения вычитаем, чтобы не считать их дважды.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 26 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \dfrac{26}{12} \right\rceil = 3$.
Ответ: 3.

Задание 3

Баня занимает $2 \cdot 4 = 8$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $8 \cdot 4 = 32$ м^2.
Ответ: 32.

Задание 4

Горизонтальные проекции построек перекрываются; вертикальный промежуток составляет 2 клетки.
Расстояние равно $2 \cdot 2 = 4$ м.
Ответ: 4.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(27500 + 24868) - (22000 + 12000) = 18368$ руб.
Газ за час: $1{,}2 \cdot 6 = 7{,}2$ руб.; электричество: $8 \cdot 5 = 40$ руб.
Экономия за час равна $32{,}8$ руб. Срок: $18368 : 32{,}8 = 560$ ч.
Ответ: 560.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{17}{8} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{8}$.
Умножаем на 2 и получаем $3{,}25$.
Ответ: 3,25.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{252}$ приблизительно равно $15{,}875$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$17 + 2 = 19$.
Ответ: 19.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 14$. Из равенства получаем $x - (14) = 7$.
$x = 21$. Это значение допустимо, так как числитель $14 \neq 0$.
Ответ: 21.

Задание 10

Всего шаров $30 + 15 + 5 = 50$. Благоприятных исходов 15, поэтому вероятность равна $\dfrac{15}{50} = 0{,}3$.
Ответ: $0{,}3$.

Задание 11

График А: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{1}{x}$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = x + 2$.
Ответ: 123.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 144}{6^2} = 8$ кг.
Ответ: 8.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -6$, второе — $x \leq 0$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-6; 0]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 9 \cdot 2^6 = 576$.
Ответ: 576.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 10^2 = 676$. Длина положительна, поэтому $BC = 26$.
Ответ: 26.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 15 \cdot 7 = 105$.
Ответ: 105.

Задание 18

Основание занимает 3 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{3\cdot 4}{2}=6$.

Ответ: 6.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-3, \\ x^2+y^2=9. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-3-x$. Подставим во второе: $x^2+(-3-x)^2=9$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+3x=0$.
Разложим на множители: $(x+3)(x)=0$. Следовательно, $x=-3$ или $x=0$.
При $x=-3$ первое уравнение даёт $y=0$; при $x=0$ получаем $y=-3$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -3, сумма их квадратов равна 9.
Ответ: $(x;y)=(-3;0)$ или $(x;y)=(0;-3)$.

Задание 21

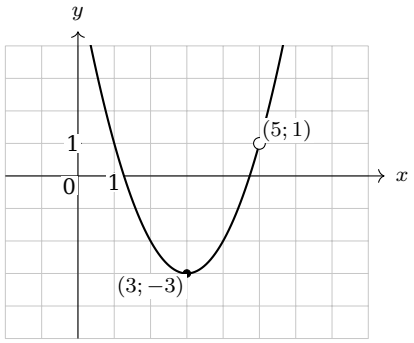
Моторная лодка прошла 51 км по течению реки и 14 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 5 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>5$. Скорости по течению и против течения равны $x+5$ и $x-5$.
Уравнение времени: $\dfrac{51}{x+5}+\dfrac{14}{x-5}=5$.
После умножения на $(x+5)(x-5)$ и приведения получаем $5x^2-65x+60=0$. Его корни: $x=12$ и $x=1$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>5$. Для $x=12$ времена равны 3 ч и 2 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-5)(x^2-6x+6)}{x-5}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 5$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 6 = (x-3)^2 - 3$.
Строим параболу с вершиной $(3;-3)$ и выколотой точкой $(5;1)$.
При $m < -3$ общих точек нет. При $m = -3$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -3$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 1$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -3$ или $m = 1$.



Ответ: $m = -3$ или $m = 1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 15$, $BF = 36$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{225 + 1296} = 39$.
Ответ: 39.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 12$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 6$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 12/\cos 45^\circ = 12\sqrt{2}$.

Ответ: $12\sqrt{2}$.