Решения. Вариант 51

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; коридор — 2; санузел — 1; спальня — 4.
Ответ: 3214.

Задание 2

Пол гостиной занимает 156 клеток, его площадь $156 \cdot 0{,}4^2 = 24{,}96$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$ м^2. Требуется $24{,}96 : 0{,}16 = 156$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{156}{16} \right\rceil = 10$ целых упаковок.
Ответ: 10.

Задание 3

На плане помещение занимает 30 клеток.
Его площадь $30 \cdot 0{,}4^2 = 4{,}8$ м^2.
Ответ: 4,8.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $390 + 25 \cdot 55 = 1765$ руб.
Тариф «Б»: $540 + 15 \cdot 30 = 990$ руб.
Безлимитный тариф стоит 810 руб. Наименьшая плата — 810 руб.
Ответ: 810.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}8$.
$9{,}8 : 0{,}5 = 19{,}6$.
Ответ: 19,6.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{35}$ приблизительно равно $-5{,}916$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{3\cdot 2-4} = 5^2 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

$5x = 40 - (20) = 20$, поэтому $x = 4$.
Ответ: 4.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 39$; их 13. Вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = -3x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = 2x + 1$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = x - 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 23$: $C = \dfrac{5}{9}(23 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (-9) = -5$.

Ответ: -5.

Задание 13

$49 = 7^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 7.
Множество решений: $(-\infty; -7] \cup [7; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{19} = 23 + (19 - 1) \cdot (-1) = 5$.
Ответ: 5.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 37° - 60° = 83°$.
Ответ: 83.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 60 : 2 = 30$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16$.
Ответ: 16.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $48 : 2 = 24$. Вторая сторона: $24 - 10 = 14$.
Площадь равна $10 \cdot 14 = 140$.
Ответ: 140.

Задание 18

Основания равны 3 и 4, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{3 + 4}{2} \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-25}{x-2}\le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x\neq 2$. Разложим числитель: $x^2-25=(x-5)(x+5)$.
Критические точки: -5, 2, 5. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -5 и 5 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-5]\cup(2;5]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $6{,}4$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 24 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x>0$. Второму требуется $x+24$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+24)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+24}=\dfrac{5}{32}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+24)=\dfrac{32}{5}(2x+24)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=8$ и $x=-\dfrac{96}{5}$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{32}=\dfrac{5}{32}$, поэтому время совместной работы равно $6{,}4$ ч.
Ответ: 8 ч.

Задание 22

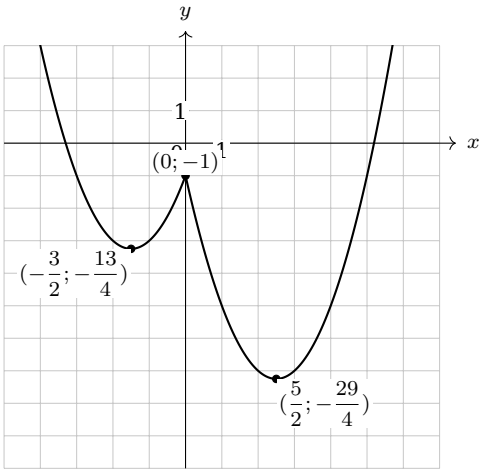
Постройте график функции $y = x^2 - x - 1 - 4|x|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{3}{2}; -\frac{13}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.

При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{13}{4}$ два; при $m = -\frac{13}{4}$ три.

При $-\frac{13}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{13}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 4$, $CK = 13$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.

Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 4$. Сторона $BC = BK + CK = 17$.

Периметр равен $2(AB + BC) = 2(4 + 17) = 42$.

Ответ: 42.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180°$.

Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90°$.

Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90°$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 5$, $BC = 9$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 9$ и $BH = AC = 5$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 5|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-5)^2 + 9^2$.

После раскрытия скобок получаем $10R = 106$. Поэтому $R = \dfrac{53}{5}$.

Ответ: $\dfrac{53}{5}$.