Решения. Вариант 53

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Озёрное — 1; Берёзовка — 2; Луговое — 4.
Ответ: 124.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $18 + 12 + 16 = 46$ км.
Ответ: 46.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 30 и 16 км.
Её длина $\sqrt{30^2 + 16^2} = 34$ км.
Ответ: 34.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 18 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 20 км.
Время: $\frac{18}{80} \cdot 60 + \frac{20}{40} \cdot 60 = 43{,}5$ мин.
Ответ: 43,5.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\frac{46 \cdot 6{,}5}{100} \cdot 67 = 200{,}33$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\frac{34 \cdot 8}{100} \cdot 67 = 182{,}24$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\frac{18 \cdot 6{,}5 + 20 \cdot 8}{100} \cdot 67 = 185{,}59$ руб.
Наименьшая стоимость — 182,24 руб.
Ответ: 182,24.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{23}{4} - \frac{7}{4} = 4$.
Умножаем на 5 и получаем 20.
Ответ: 20.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{366}$ приблизительно равно 19,131. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$24 + 1 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -4$. Из равенства получаем $x - (-4) = -\dfrac{25}{8}$.
$x = -7{,}125$. Это значение допустимо, так как числитель $-25 \neq 0$.
Ответ: $-7{,}125$.

Задание 10

Всего шаров $26 + 45 + 29 = 100$. Благоприятных исходов 45, поэтому вероятность равна $\dfrac{45}{100} = 0{,}45$.
Ответ: $0{,}45$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = x + 1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{8{,}4 \cdot 14}{14 - 8{,}4} = 21$ Ом.
Ответ: 21.

Задание 13

Нули множителей: -3 и 6. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-3; 6)$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_7 = 3 \cdot 2^6 = 192$.
Ответ: 192.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{12 \cdot 18}{2} = 108$.

Ответ: 108.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 7 и 5, поэтому площадь равна $7 \cdot 5 = 35$.

Ответ: 35.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.

Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{24}{x-45} + \dfrac{24}{x+45} = 1$.

Область допустимых значений: $x \neq 45$ и $x \neq -45$.
Умножим уравнение на $(x-45)(x+45)$: $24(x+45) + 24(x-45) = x^2 - 2025$.
Получим $x^2 - 48x - 2025 = 0$, или $(x-24)^2 = 2601 = 51^2$.
Поэтому $x = 24 - 51 = -27$ или $x = 24 + 51 = 75$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.

Ответ: $-27;\ 75$.

Задание 21

Имеются два сплава с содержанием меди 25% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 35% меди?

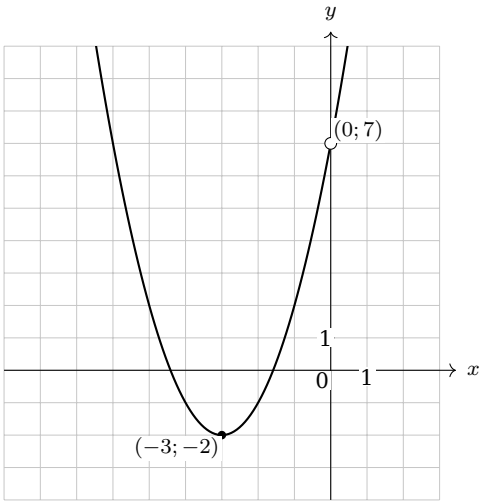
Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70 - x$ кг, причём $0 < x < 70$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{25}{100}x + \dfrac{75}{100}(70 - x) = \dfrac{35}{100} \cdot 70$.
Умножим на 100: $25x + 5250 - 75x = 2450$. Поэтому $50x = 2800$ и $x = 56$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.

Ответ: 56 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x)(x^2+6x+7)}{x}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 0$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(-3;-2)$ и выколотой точкой $(0;7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -6 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 51, а основание равно 48. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{51^2 - 24^2} = 45$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 48 \cdot 45 = 1080$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{51 \cdot 51 \cdot 48}{4 \cdot 1080} = \dfrac{289}{10}$.
Ответ: $\dfrac{289}{10}$.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 45$, $CD = 51$, основание $BC = 13{,}5$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.

Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.

Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.

Получаем $AD = KC - BC = 51 - \dfrac{27}{2} = \dfrac{75}{2}$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 45$, $AP = BC = \dfrac{27}{2}$, $PD = AD - BC = 24$.

В треугольнике CPD выполняется $45^2 + 24^2 = 51^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 45.

Площадь $S = \dfrac{\dfrac{75}{2} + \dfrac{27}{2}}{2} \cdot 45 = \dfrac{2295}{2}$.

Ответ: $\dfrac{2295}{2}$.