Решения. Вариант 54

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 12 м^3 — печь № 2, 14 м^3 — печь № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

$V = 3{,}6 \cdot 2{,}4 \cdot 2{,}4 = 20{,}736$ м^3.
Ответ: 20,736.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $54 : 2 = 27$ см и 36 см.
$R = \sqrt{27^2 + 36^2} = 45$ см.
Ответ: 45.

Задание 4

После скидки остаётся 85% цены. Получаем $31600 \cdot \dfrac{85}{100} = 26860$ руб.
Ответ: 26860.

Задание 5

Объём парной равен $20{,}736$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $31600 + 1000 = 32600$ руб.
Печь № 3: $26400 + 1000 + 5400 = 32800$ руб.
Наименьшая сумма — 32600 руб.
Ответ: 32600.

Задание 6

Сумма в скобках равна $11{,}4$.
$11{,}4 : 0{,}5 = 22{,}8$.
Ответ: 22,8.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{93}$ приблизительно равно $-9{,}644$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $4^{3 \cdot 2 - 3} = 4^3 = 64$.
Ответ: 64.

Задание 9

$8x = 18 - (2) = 16$, поэтому $x = 2$.
Ответ: 2.

Задание 10

На 3 делятся числа $3, 6, \ldots, 39$; их 13. Вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.

Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -2x - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = x + 2$.
График В: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = 3x + 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 283{,}5}{9^2} = 7$ кг.

Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -6$, второе — $x \le 6$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-6; 6]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{25} = 10 + (25-1) \cdot (2) = 58$.
Ответ: 58.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 64° - 40° = 76°$.
Ответ: 76.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{15^2 + 36^2} = 39$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 39 : 2 = 19{,}5$.
Ответ: $19{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 25 \cdot 10 = 250$.
Ответ: 250.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 3 и 4. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Ответ: 5.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 26t + 25 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 25) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 25$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 25$ — $x = \pm 5$.
Ответ: $-5;\ -1;\ 1;\ 5$.

Задание 21

Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 448 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{448}{x} - \dfrac{448}{x+4} = 2$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $1792 = 2x(x+4)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 28)(x + 32) = 0$.
Корень $x = -32$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 28 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 28 км/ч.

Задание 22

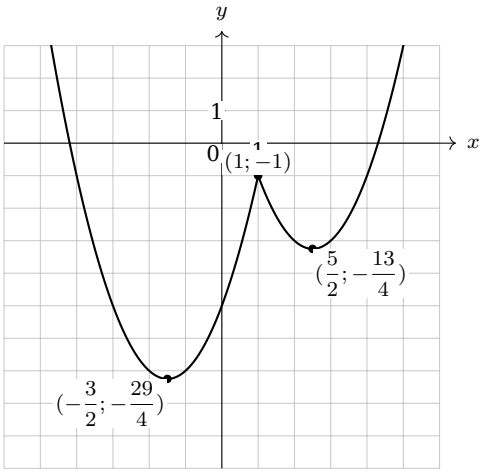
Постройте график функции $y = x^2 - x - 1 - 4|x - 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 3t - 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$ и $(\frac{3}{2}; -\frac{13}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.

При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{13}{4}$ два; при $m = -\frac{13}{4}$ три.

При $-\frac{13}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{13}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 25 и 16. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $25 + 16 = 41$. Обозначим катеты u и v.

Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 41 \cdot 25$ и $v^2 = 41 \cdot 16$.

Поэтому $u = 5\sqrt{41}$, $v = 4\sqrt{41}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 41 + 9\sqrt{41}$.

Ответ: $41 + 9\sqrt{41}$.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 8$, $MD = 5$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 25$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{25}{8} = \dfrac{25}{8}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 8 - \dfrac{25}{8} = \dfrac{39}{8}$.
Ответ: $\dfrac{39}{8}$.