Решения. Вариант 55

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 6.
Ответ: 6.

Задание 2

Лимит равен 300 минутам. Он превышен в месяцах № 1, 2, 4, 5, 6, 11, 12.
Всего таких месяцев — 7.
Ответ: 7.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{4+8+6+10}{4} = 7$ ГБ.
Ответ: 7.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 8 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 0 ГБ.
Плата: $510 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 510$ руб.
Ответ: 510.

Задание 5

За месяц № 10 использовано 250 минут и 10 ГБ.
«Основной»: $510 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 60 = 510$ руб.
«Расширенный»: $740 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 50 = 740$ руб.
Наименьшая плата — 510 руб.
Ответ: 510.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $6^2 = 36$. Поэтому значение выражения равно $25 - 36 = -11$.
Ответ: -11.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{186}{11}$ приблизительно равно $16{,}909$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $11 + 2\sqrt{110} + 10 - 2\sqrt{110} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+5)(x-2) = 0$. Корни: -5 и 2.
Требуемый корень равен 2.
Ответ: 2.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 9 = 491$. Вероятность равна $\dfrac{491}{500} = 0{,}982$.

Ответ: $0{,}982$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 113$: $C = \dfrac{5}{9}(113 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (81) = 45$.

Ответ: 45.

Задание 13

$100 = 10^2$. Требуются числа, модуль которых больше 10.
Множество решений: $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

От первого до 15-го ряда число мест увеличивается 14 раз: $18 + 14 \cdot 4 = 74$.
Ответ: 74.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$, поэтому каждый равен 32°.
Ответ: 32.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 24 : 2 = 12$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $28 : 2 = 14$. Вторая сторона: $14 - 7 = 7$.
Площадь равна $7 \cdot 7 = 49$.
Ответ: 49.

Задание 18

Основание занимает 7 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$.

Ответ: 21.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 2 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=-1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=-1-x$. Подставим во второе: $x^2+(-1-x)^2=5$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2+x-2=0$.
Разложим на множители: $(x+2)(x-1)=0$. Следовательно, $x=-2$ или $x=1$.
При $x=-2$ первое уравнение даёт $y=1$; при $x=1$ получаем $y=-2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна -1, сумма их квадратов равна 5.
Ответ: $(x;y)=(-2;1)$ или $(x;y)=(1;-2)$.

Задание 21

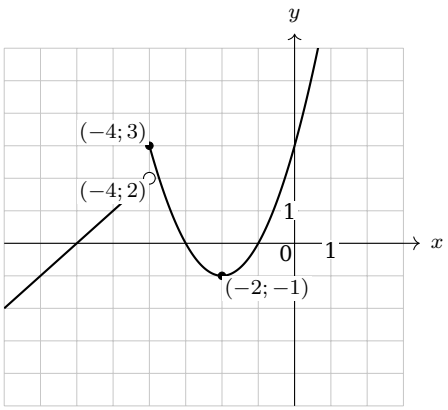
Моторная лодка прошла 48 км по течению реки и 36 км против течения, затратив на весь путь 6 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>2$. Скорости по течению и против течения равны $x+2$ и $x-2$.
Уравнение времени: $\dfrac{48}{x+2}+\dfrac{36}{x-2}=6$.
После умножения на $(x+2)(x-2)$ и приведения получаем $6x^2-84x=0$. Его корни: $x=14$ и $x=0$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>2$. Для $x=14$ времена равны 3 ч и 3 ч, их сумма 6 ч.
Ответ: 14 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \begin{cases} (x+2)^2 - 1, & x \geq -4, \\ x + 6, & x < -4. \end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-2; -1)$, оставленная при $x \geq -4$. Точка $(-4; 3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y = x + 6$ при $x < -4$. Его конечная точка $(-4; 2)$ выколота.
При $m < -1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m = -1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1 < m < 2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $2 \leq m \leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m > 3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(-4; 3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m = -1$ или $2 \leq m \leq 3$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 24$, $BF = 45$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{576 + 2025} = 51$.
Ответ: 51.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO = \angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 13$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 120^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 60^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 60^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{13}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 60^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 13/\cos 60^\circ = 26$.

Ответ: 26.