Решения. Вариант 56

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

А5 — размеры № 1, А6 — размеры № 2, А4 — размеры № 3.
Ответ: 123.

Задание 2

При переходе от А0 к А4 число листов удваивается 4 раза.
Получаем $3 \cdot 2^4 = 48$ листов.
Ответ: 48.

Задание 3

Размеры листа равны $14{,}8$ см и 21 см.
Площадь $14{,}8 \cdot 21 = 310{,}8$ см^2.
Ответ: 310,8.

Задание 4

Площадь одного листа: $0{,}297 \cdot 0{,}42 = 0{,}12474$ м^2.
Масса пачки: $\dfrac{0{,}12474 \cdot 80 \cdot 250}{1000} = 2{,}4948$ кг.
После округления получаем $2{,}5$ кг.
Ответ: 2,5.

Задание 5

Всего нужно $830 \cdot 2 = 1660$ листов.
Число пачек: $\left\lceil \dfrac{1660}{250} \right\rceil = 7$.
Стоимость: $7 \cdot 400 = 2800$ руб.
Ответ: 2800.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{19}{4} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{2}$.
Умножаем на 2 и получаем 9.
Ответ: 9.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{44}$ приблизительно равно $6{,}633$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$12 + 3 = 15$.
Ответ: 15.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 1$. Из равенства получаем $x-(1)=\frac{1}{4}$.
$x = 1{,}25$. Это значение допустимо, так как числитель $2 \neq 0$.
Ответ: $1{,}25$.

Задание 10

Всего шаров $26+6+8=40$. Благоприятных исходов 6, поэтому вероятность равна $\frac{6}{40}=0{,}15$.
Ответ: $0{,}15$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y=-2x-1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x=1$. Ему соответствует формула 1, $y=\frac{-1}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y=x^2+2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h=\frac{2S}{a+b}=\frac{2\cdot 264}{4+29}=16$.
Ответ: 16.

Задание 13

Получаем $-5x \geq -30$. Делим на -5, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty;6]$.
Ответ: 2.

Задание 14

$b_n=b_1q^{n-1}$, поэтому $b_5=5\cdot 2^4=80$.
Ответ: 80.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2+AC^2=48^2+20^2=2704$. Длина положительна, поэтому $BC=52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB=78^\circ:2=39^\circ$.
Ответ: 39.

Задание 17

$S=\frac{AD+BC}{2}\cdot BH=\frac{25+6}{2}\cdot 9=139{,}5$.
Ответ: $139{,}5$.

Задание 18

Основания равны 3 и 5, высота равна 5. Площадь $S = \dfrac{3+5}{2} \cdot 5 = 20$.

Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 3 неверно. В формуле площади трапеции нужна полусумма оснований.

Ответ: 1.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-36}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-36 = (x-6)(x+6)$.
Критические точки: -6, 2, 6. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -6 и 6 включаем, точку 2 исключаем.

Ответ: $(-\infty;-6] \cup (2;6]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 6 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 5 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

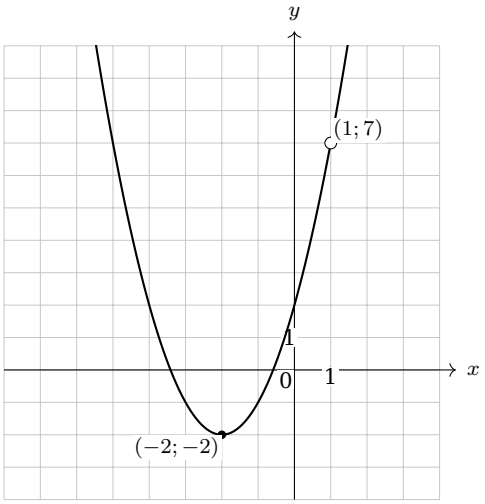
Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+5$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+5)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{1}{6}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+5) = 6(2x+5)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 10$ и $x = -3$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{6}$, поэтому время совместной работы равно 6 ч.

Ответ: 10 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-1)(x^2+4x+2)}{x-1}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 1$. На этой области она равна $y = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(-2;-2)$ и выколотой точкой $(1;7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -5 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 14$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 5$. Сторона $BC = BK + CK = 19$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(5 + 19) = 48$.
Ответ: 48.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 6$, $BC = 5$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 5$ и $BH = AC = 6$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 6|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-6)^2 + 5^2$.

После раскрытия скобок получаем $12R = 61$. Поэтому $R = \dfrac{61}{12}$.

Ответ: $\dfrac{61}{12}$.