Решения. Вариант 57

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 225, 235, 245 мм. Наибольшая из них — 245 мм.
Ответ: 245.

Задание 2

$H = 215 \cdot \dfrac{65}{100} = 139{,}75$ мм.
Ответ: 139,75.

Задание 3

Диаметр диска: $14 \cdot 25{,}4 = 355{,}6$ мм.
Высота боковины: $225 \cdot \dfrac{60}{100} = 135$ мм.
$D = 355{,}6 + 2 \cdot 135 = 625{,}6$ мм.
Ответ: 625,6.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$225 \cdot \dfrac{55}{100} - 235 \cdot \dfrac{50}{100} = 6{,}25$ мм.
Ответ: 6,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $15 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 225 \cdot \dfrac{55}{100} = 628{,}5$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{628{,}5 - 625{,}6}{625{,}6} \cdot 100\% \approx 0{,}5\%$.
Ответ: 0,5.

Задание 6

Сумма в скобках равна $4{,}5$.
$4{,}5 : 0{,}5 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{193}$ приблизительно равно $-13{,}892$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $5^{3 \cdot 2 - 4} = 5^2 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

$4x = -32 - (-16) = -16$, поэтому $x = -4$.
Ответ: -4.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 40$; их 5. Вероятность равна $\dfrac{5}{40} = 0{,}125$.
Ответ: $0{,}125$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = -3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 3, $y = -x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 1, $y = 2x$.
Ответ: 231.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{22{,}8 \cdot 38}{38 - 22{,}8} = 57$ Ом.
Ответ: 57.

Задание 13

Нули множителей: -8 и 1. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-8; 1]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_9 = 3 + (9-1) \cdot (1) = 11$.
Ответ: 11.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 38° - 56° = 86°$.
Ответ: 86.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{6 \cdot 10}{2} = 30$.
Ответ: 30.

Задание 18

Основание равно 3, высота равна 6. Площадь параллелограмма $S = 3 \cdot 6 = 18$.
Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Контрпример: треугольники с острыми углами 30 и 60 градусов и с острыми углами 45 и 45 градусов.
Утверждение 2 верно. Это формула площади параллелограмма.
Утверждение 3 верно. Это теорема о средней линии треугольника.
Ответ: 23.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 6x^2 - 64x - 384 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+6) - 64(x+6) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+6)(x^2-64) = (x+6)(x-8)(x+8) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-8;\ -6;\ 8$.
Ответ: $-8;\ -6;\ 8$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 13 км/ч, второго 18 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 15 мин. Расстояние между посёлками $89{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{4}$ ч, второй — t ч.

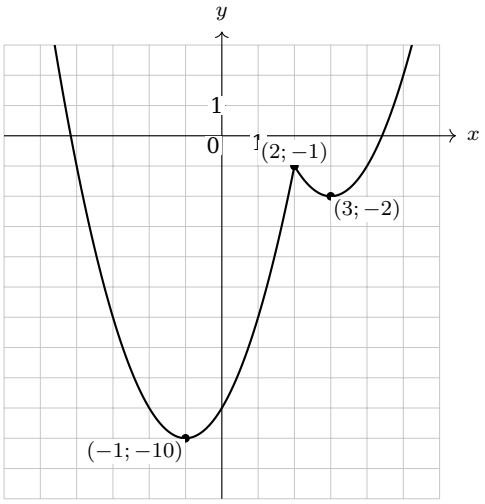
Сумма путей: $13(t - \frac{1}{4}) + 18t = \frac{359}{4}$. Отсюда $31t = 93$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $18 \cdot 3 = 54$ км. Время движения первого $\frac{11}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 54 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 - 2x - 1 - 4|x - 2|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 2$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 6t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t - 1$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-3; -10)$ и $(1; -2)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.
При $m < -10$ пересечений нет; при $m = -10$ одно; при $-10 < m < -2$ два; при $m = -2$ три.
При $-2 < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -2$ или $m = -1$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 7$, $AC = 14$, $NC = 15$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 15$. По подобию $\dfrac{x}{x + 15} = \dfrac{7}{14}$.
Отсюда $14x = 7(x + 15)$, то есть $7x = 105$. Получаем $BN = 15$.
Ответ: 15.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 20$, $BC = 24$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{3}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{72}{5}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 20 - \dfrac{72}{5} = \dfrac{28}{5}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 24 \cdot \dfrac{\frac{28}{5}}{20} = \dfrac{168}{25}$.

Ответ: $\dfrac{168}{25}$.