Решения. Вариант 58

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

баня — 6; жилой дом — 3; яблони — 5; теплица — 1.
Ответ: 6351.

Задание 2

По условию площадь площадки равна 64 м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 64 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{64}{4} \right\rceil = 16$.
Ответ: 16.

Задание 3

Дом занимает 17 клеток, баня — 8 клеток. Разность равна 9 клеткам.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $9 \cdot 4 = 36$ м^2.
Ответ: 36.

Задание 4

Вертикальные проекции построек перекрываются; горизонтальный промежуток составляет 9 клеток.
Расстояние равно $9 \cdot 2 = 18$ м.
Ответ: 18.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(29000 + 20860) - (24000 + 10500) = 15360$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 6 = 9$ руб.; электричество: $6 \cdot 5{,}5 = 33$ руб.
Экономия за час равна 24 руб. Срок: $15360 : 24 = 640$ ч.
Ответ: 640.

Задание 6

$(-5)^2 = 25$, $4^2 = 16$. Поэтому значение выражения равно $25 - 16 = 9$.
Ответ: 9.

Задание 7

Значение числа $\frac{355}{17}$ приблизительно равно $20{,}882$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $6 + 2\sqrt{90} + 15 - 2\sqrt{90} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x + 9)(x + 6) = 0$. Корни: -9 и -6.
Требуемый корень равен -9.
Ответ: -9.

Задание 10

Исправных ламп $1000 - 3 = 997$. Вероятность равна $\dfrac{997}{1000} = 0{,}997$.

Ответ: $0{,}997$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 1$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 648}{12^2} = 9$ кг.

Ответ: 9.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -3$, второе — $x \le 2$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-3; 2]$.
Ответ: 1.

Задание 14

От первого до 12-го ряда число мест увеличивается 11 раз: $20 + 11 \cdot 3 = 53$.
Ответ: 53.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$, поэтому каждый равен 47°.
Ответ: 47.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 13 : 2 = 6{,}5$.
Ответ: $6{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 7 \cdot 11 = 77$.
Ответ: 77.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 5 и 5, поэтому площадь равна $5 \cdot 5 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Диагонали ромба перпендикулярны по теореме.
Утверждение 2 неверно. У равнобедренной трапеции диагонали равны, но она не является прямоугольником.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $\frac{12}{x-16}+\frac{12}{x+16}=1$.

Область допустимых значений: $x \neq 16$ и $x \neq -16$.
Умножим уравнение на $(x-16)(x+16)$: $12(x+16)+12(x-16)=x^2-256$.
Получим $x^2-24x-256=0$, или $(x-12)^2=400=20^2$.
Поэтому $x = 12-20 = -8$ или $x = 12+20 = 32$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-8;\ 32$.

Задание 21

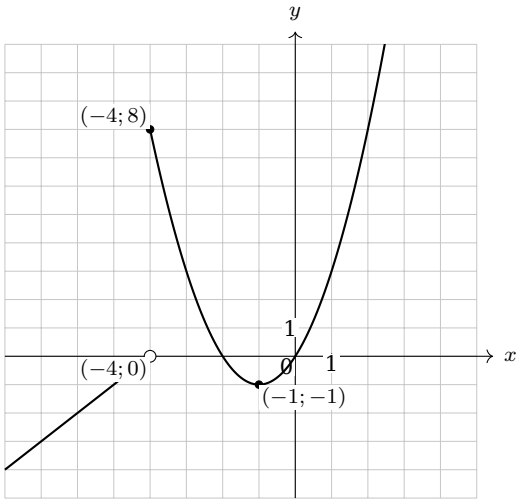
Имеются два сплава с содержанием меди 30% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 40% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70-x$ кг, причём $0<x<70$.
Количество меди сохраняется: $\frac{30}{100}x+\frac{65}{100}(70-x)=\frac{40}{100}\cdot 70$.
Умножим на 100: $30x+4550-65x=2800$. Поэтому $35x=1750$ и $x=50$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.
Ответ: 50 кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x+1)^2-1, & x\geq -4,\\ x+4, & x<-4.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(-1;-1)$, оставленная при $x\geq -4$. Точка $(-4;8)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+4$ при $x<-4$. Его конечная точка $(-4;0)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 8$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>8$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 8 включена, поскольку точка $(-4;8)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $0\leq m\leq 8$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 20, а основание равно 24. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h=\sqrt{20^2-12^2}=16$.
Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 24\cdot 16=192$.
По формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$ получаем $R=\dfrac{20\cdot 20\cdot 24}{4\cdot 192}=\dfrac{25}{2}$.
Ответ: $\dfrac{25}{2}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC высоты пересекаются в точке H.
Докажите, что $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$.

Пусть E — основание высоты из B, а F — основание высоты из C. В четырёхугольнике $AEHF$ углы при E и F прямые.
По сумме углов четырёхугольника $\angle EHF + \angle EAF = 180^\circ$. При этом $\angle EAF = \angle BAC$.
Ортоцентр остроугольного треугольника находится внутри него. Лучи HE и HB противоположны, как и лучи HF и HC, поэтому $\angle BHC = \angle EHF$. Получаем требуемое равенство.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 48$, $CD = 52$, основание $BC = 16$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 52 - 16 = 36$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 48$, $AP = BC = 16$, $PD = AD - BC = 20$.
В треугольнике CPD выполняется $48^2 + 20^2 = 52^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 48.
Площадь $S = \dfrac{36 + 16}{2} \cdot 48 = 1248$.
Ответ: 1248.