Решения. Вариант 59

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; спальня — 4; санузел — 1; гостиная — 6.
Ответ: 3416.

Задание 2

Пол гостиной занимает 156 клеток, его площадь $156 \cdot 0{,}5^2 = 39$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$ м^2. Требуется $39 : 0{,}25 = 156$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{156}{6} \right\rceil = 26$ целых упаковок.
Ответ: 26.

Задание 3

На плане помещение занимает 99 клеток.
Его площадь $99 \cdot 0{,}5^2 = 24{,}75$ м^2.
Ответ: 24,75.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 156 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{156 - 30}{30} \cdot 100\% = 420\%$.
Ответ: 420.

Задание 5

Тариф «А»: $400 + 8 \cdot 60 = 880$ руб.
Тариф «Б»: $550 + 0 \cdot 35 = 550$ руб.
Безлимитный тариф стоит 825 руб. Наименьшая плата — 550 руб.
Ответ: 550.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{8}{5} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{5}$.
Умножаем на 2 и получаем $2{,}8$.
Ответ: 2,8.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{108}$ приблизительно равно $10{,}392$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$24 + 1 = 25$.
Ответ: 25.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 10$. Из равенства получаем $x - (10) = -\dfrac{17}{2}$.
$x = 1{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-17 \neq 0$.
Ответ: $1{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $12 + 13 + 15 = 40$. Благоприятных исходов 13, поэтому вероятность равна $\dfrac{13}{40} = 0{,}325$.
Ответ: $0{,}325$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{-2}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x - 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 86$: $C = \dfrac{5}{9}(86 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (54) = 30$.
Ответ: 30.

Задание 13

$121 = 11^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 11.
Множество решений: $(-\infty; -11] \cup [11; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 9 \cdot 2^3 = 72$.
Ответ: 72.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$. Длина положительна, поэтому $BC = 15$.
Ответ: 15.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 16 : 2 = 8$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.
Ответ: 6.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $52 : 2 = 26$. Вторая сторона: $26 - 10 = 16$.
Площадь равна $10 \cdot 16 = 160$.
Ответ: 160.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 40t + 144 = 0$, то есть $(t - 4)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 4$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 4$ получаем $x = \pm 2$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.
Ответ: $-6;\ -2;\ 2;\ 6$.

Задание 21

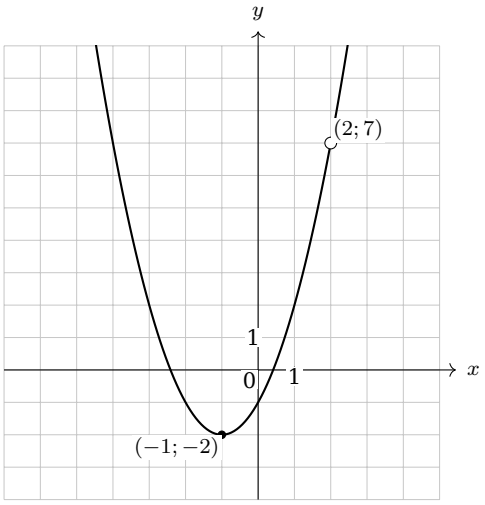
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 288 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{288}{x} - \dfrac{288}{x + 2} = 2$. Умножив на $x(x + 2)$, получаем $576 = 2x(x + 2)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 16)(x + 18) = 0$.
Корень $x = -18$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 16 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 2$. На этой области она равна $y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(-1; -2)$ и выколотой точкой $(2; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 72 и 32. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $72 + 32 = 104$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 104 \cdot 72$ и $v^2 = 104 \cdot 32$.
Поэтому $u = 24\sqrt{13}$, $v = 16\sqrt{13}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 104 + 40\sqrt{13}$.
Ответ: $104 + 40\sqrt{13}$.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 9$, $MD = 6$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 36$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{36}{9} = 4$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 9 - 4 = 5$.
Ответ: 5.