Решения. Вариант 60

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Васильково — 4; Журавушка — 1; Иваново — 2.
Ответ: 412.

Задание 2

Путь занимает 5 клеток.
Длина пути равна $5 \cdot 2 = 10$ км.
Ответ: 10.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 24 и 10 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ км.
Ответ: 26.

Задание 4

От Василькова до Камышина 22 км, от Камышина до Иванова 26 км.
Время в минутах равно $\dfrac{22}{24} \cdot 60 + \dfrac{26}{12} \cdot 60 = 185$.
Ответ: 185.

Задание 5

Васильково: $3 \cdot 65 + 1{,}5 \cdot 640 + 2 \cdot 835 = 2825$ руб.
Иваново: $3 \cdot 55 + 1{,}5 \cdot 625 + 2 \cdot 859 = 2820{,}5$ руб.
Камышино: $3 \cdot 50 + 1{,}5 \cdot 649 + 2 \cdot 880 = 2883{,}5$ руб.
Журавушка: $3 \cdot 58 + 1{,}5 \cdot 670 + 2 \cdot 850 = 2879$ руб.
Наименьшая стоимость — $2820{,}5$ руб.
Ответ: 2820,5.

Задание 6

Сумма в скобках равна $3{,}7$.
$3{,}7 : 0{,}5 = 7{,}4$.
Ответ: 7,4.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{311}$ приблизительно равно $-17{,}635$. Его положению на прямой соответствует точка B.
Ответ: 2.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{4 \cdot 2 - 7} = 2^1 = 2$.
Ответ: 2.

Задание 9

$8x = 116 - (-8) = 124$, поэтому $x = 15{,}5$.
Ответ: 15,5.

Задание 10

На 4 делятся числа $4, 8, \ldots, 20$; их 5. Вероятность равна $\dfrac{5}{20} = 0{,}25$.

Ответ: $0{,}25$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 1, $y = 3x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 0. Ему соответствует формула 3, $y = 2x$.
График В: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 2, $y = x + 2$.
Ответ: 132.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a+b} = \dfrac{2 \cdot 46{,}5}{11 + 20} = 3$.

Ответ: 3.

Задание 13

Получаем $-3x > -27$. Делим на -3, меняя знак неравенства.
Множество решений: $(-\infty; 9)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_9 = -3 + (9-1) \cdot (2) = 13$.

Ответ: 13.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 38° - 30° = 112°$.

Ответ: 112.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 120° : 2 = 60°$.

Ответ: 60.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{19 + 11}{2} \cdot 13 = 195$.

Ответ: 195.

Задание 18

Основание занимает 6 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

Ответ: 18.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 верно. Оба вписанных угла равны половине одной и той же дуги.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y=1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y=1-x$. Подставим во второе: $x^2+(1-x)^2=5$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2-x-2=0$.
Разложим на множители: $(x+1)(x-2)=0$. Следовательно, $x=-1$ или $x=2$.
При $x=-1$ первое уравнение даёт $y=2$; при $x=2$ получаем $y=-1$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 1, сумма их квадратов равна 5.
Ответ: $(x;y)=(-1;2)$ или $(x;y)=(2;-1)$.

Задание 21

Моторная лодка прошла 57 км по течению реки и 13 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения равна 3 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x>3$. Скорости по течению и против течения равны $x+3$ и $x-3$.
Уравнение времени: $\dfrac{57}{x+3}+\dfrac{13}{x-3}=4$.
После умножения на $(x+3)(x-3)$ и приведения получаем $4x^2-70x+96=0$. Его корни: $x=16$ и $x=\dfrac{3}{2}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x>3$. Для $x=16$ времена равны 3 ч и 1 ч, их сумма 4 ч.
Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

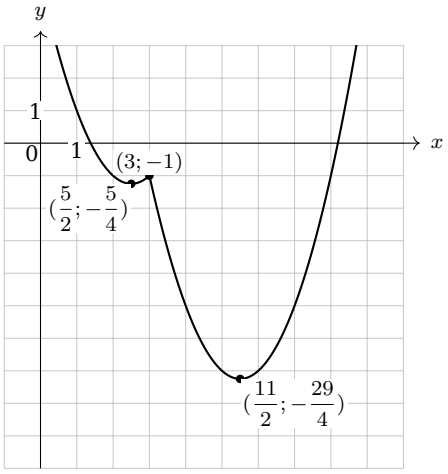
Постройте график функции $y = x^2 - 8x + 14 - 3|x - 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x - 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 1t - 1$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t - 1$.

Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{29}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = -1$.

При $m < -\frac{29}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{29}{4}$ одно; при $-\frac{29}{4} < m < -\frac{5}{4}$ два; при $m = -\frac{5}{4}$ три.

При $-\frac{5}{4} < m < -1$ пересечений четыре. При $m = -1$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > -1$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{5}{4}$ или $m = -1$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 12$, $BF = 16$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$.
Ответ: 20.

Задание 24

В трапеции $ABCD$ основаниями являются AD и BC. Точка K — середина боковой стороны CD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

Пусть основания равны a и b, а высота трапеции равна h. Так как K — середина CD, её расстояния до оснований равны $h/2$; это следует из подобия прямоугольных треугольников при проведении перпендикуляров к основаниям.
Поэтому $S_{KAD} = ah/4$, $S_{KBC} = bh/4$. Их сумма равна $(a+b)h/4$, то есть половине площади трапеции.
Треугольники KAD, KBC и KAB составляют всю трапецию без наложения внутренних областей. Следовательно, оставшийся треугольник KAB также занимает половину её площади.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 14$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.
Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.
Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$.
Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.
Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = 7$.
В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 14/\cos 30^\circ = \dfrac{28\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$.