# Решения. Вариант 61

**Материалы для проверки.** В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

## Задание 1

Берёзовка — 3; Луговое — 1; Сосновка — 2.
**Ответ:** 312.

## Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $24 + 16 + 30 = 70$ км.
**Ответ:** 70.

## Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $16$ и $30$ км.
Её длина $\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$ км.
**Ответ:** 34.

## Задание 4

До Сосновки по шоссе $24$ км, от Сосновки до Озёрного по прямой $34$ км.
Время: $\frac{24}{75} \cdot 60 + \frac{34}{25} \cdot 60 = 100{,}8$ мин.
**Ответ:** 100,8.

## Задание 5

Весь путь по шоссе: $\frac{70 \cdot 7}{100} \cdot 69 = 338{,}1$ руб.
Прямая просёлочная дорога: $\frac{50 \cdot 9}{100} \cdot 69 = 310{,}5$ руб.
Через Сосновку и далее мимо пруда: $\frac{24 \cdot 7 + 34 \cdot 9}{100} \cdot 69 = 327{,}06$ руб.
Наименьшая стоимость — $310{,}5$ руб.
**Ответ:** 310,5.

## Задание 6

$(-10)^2 = 100$, $11^2 = 121$. Поэтому значение выражения равно $100 - 121 = -21$.
**Ответ:** $-21$.

## Задание 7

Значение числа $\frac{121}{17}$ приблизительно равно $7{,}118$. Его положению на прямой соответствует точка $A$.
**Ответ:** 1.

## Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $5 + 2\sqrt{85} + 17 - 2\sqrt{85} = 22$.
**Ответ:** 22.

## Задание 9

Разложение на множители: $(x + 8)(x - 6) = 0$. Корни: $-8$ и $6$.
Требуемый корень равен $6$.
**Ответ:** 6.

## Задание 10

Исправных ламп $200 - 4 = 196$. Вероятность равна $\dfrac{196}{200} = 0{,}98$.

**Ответ:** $0{,}98$.

## Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = 2x^2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
**Ответ:** 231.

## Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.

$R_2 = \dfrac{12 \cdot 20}{20 - 12} = 30$ Ом.

**Ответ:** $30$.

## Задание 13

Нули множителей: $-8$ и $2$. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-8; 2)$.
**Ответ:** 2.

## Задание 14

От первого до $19$-го ряда число мест увеличивается $18$ раз: $13 + 18 \cdot 3 = 67$.
**Ответ:** $67$.

## Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, поэтому каждый равен $36^\circ$.
**Ответ:** $36$.

## Задание 16

Радиус $OT$ перпендикулярен касательной $PT$, поэтому треугольник $OTP$ прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.
**Ответ:** $8$.

## Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{10 \cdot 10}{2} = 50$.

**Ответ:** $50$.

## Задание 18

Основания равны $3$ и $5$, высота равна $3$. Площадь $S = \dfrac{3 + 5}{2} \cdot 3 = 12$.

**Ответ:** $12$.

## Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 верно. Вертикальные углы равны по теореме.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
**Ответ:** 12.

## Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-49}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-49 = (x-7)(x+7)$.
Критические точки: $-7$, $2$, $7$. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки $-7$ и $7$ включаем, точку $2$ исключаем.
**Ответ:** $(-\infty;-7]\cup(2;7]$.

## Задание 21

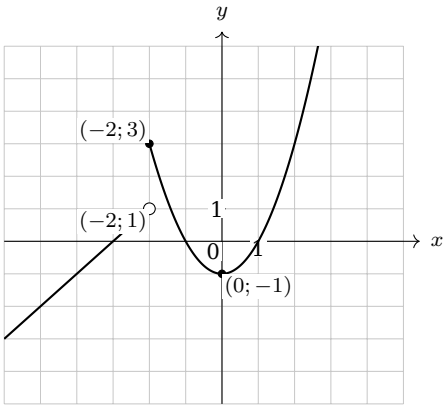
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $10$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 15 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется $x$ ч, $x>0$. Второму требуется $x+15$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+15)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+15}=\dfrac{1}{10}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+15)=10(2x+15)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x=15$ и $x=-10$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{1}{10}$, поэтому время совместной работы равно $10$ ч.
**Ответ:** $15$ ч.

## Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x)^2-1, & x\geq -2,\\ x+3, & x<-2.\end{cases}$ Определите все значения $m$, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(0;-1)$, оставленная при $x\geq -2$. Точка $(-2;3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x+3$ при $x<-2$. Его конечная точка $(-2;1)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<1$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $1\leq m\leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница $3$ включена, поскольку точка $(-2;3)$ принадлежит графику.




**Ответ:** $m=-1$ или $1\leq m\leq 3$.

## Задание 23

Биссектриса угла $A$ параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону $BC$ в точке $K$. Найдите периметр параллелограмма, если $BK=6$, $CK=15$.

Из параллельности $AD$ и $BC$ следует $\angle AKB=\angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK=\angle KAD$, поэтому $\angle BAK=\angle AKB$.
Треугольник $ABK$ равнобедренный, значит, $AB=BK=6$. Сторона $BC=BK+CK=21$.
Периметр равен $2(AB+BC)=2(6+21)=54$.
**Ответ:** $54$.

## Задание 24

В треугольнике $ABC$ угол $ACB$ тупой. Проведены высоты $AA_1$ и $BB_1$.
Докажите, что треугольники $A_1CB_1$ и $ACB$ подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку $C$: $A_1$ — на продолжении $BC$, $B_1$ — на продолжении $AC$.
Прямоугольные треугольники $CAA_1$ и $CBB_1$ подобны: их острые углы при $C$ равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы $A_1CB_1$ и $ACB$ равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники $A_1CB_1$ и $ACB$ подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

## Задание 25

В прямоугольном треугольнике $ABC$ угол $C$ прямой, $AC = 7$, $BC = 10$.
Окружность проходит через точку $A$ и касается прямой $BC$ в точке $B$.
Найдите радиус окружности.

Пусть $O$ — центр окружности, $R$ — её радиус. Радиус $OB$ перпендикулярен касательной $BC$, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от $BC$, что и точка $A$.
Проведём из $A$ перпендикуляр $AH$ к прямой $OB$. Тогда $AH = BC = 10$ и $BH = AC = 7$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 7|$. Теорема Пифагора в треугольнике $AHO$ даёт $R^2 = (R-7)^2 + 10^2$.

После раскрытия скобок получаем $14R = 149$. Поэтому $R = \dfrac{149}{14}$.

**Ответ:** $\dfrac{149}{14}$.