Решения. Вариант 62

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

По столбцу диапазонов: 8 м^3 — печь № 1, 14 м^3 — печь № 3, 12 м^3 — печь № 2.
Ответ: 132.

Задание 2

$V = 3{,}7 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}4 = 22{,}2$ м^3.
Ответ: 22,2.

Задание 3

Радиус к верхнему концу вертикальной стороны является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами $60 : 2 = 30$ см и 40 см.
$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ см.
Ответ: 50.

Задание 4

После скидки остаётся 80% цены. Получаем $32200 \cdot \dfrac{80}{100} = 25760$ руб.
Ответ: 25760.

Задание 5

Объём парной равен $22{,}2$ м^3. Подходят печи № 2, 3.
Печь № 2: $32200 + 1050 = 33250$ руб.
Печь № 3: $26800 + 1050 + 5550 = 33400$ руб.
Наименьшая сумма — 33250 руб.
Ответ: 33250.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $1 - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3}{2}$.
Умножаем на 4 и получаем -6.
Ответ: -6.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{214}$ приблизительно равно $14{,}629$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$11 + 2 = 13$.
Ответ: 13.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 1$. Из равенства получаем $x - (1) = -\dfrac{18}{5}$.
$x = -2{,}6$. Это значение допустимо, так как числитель $-18 \neq 0$.
Ответ: $-2{,}6$.

Задание 10

Всего шаров $39+7+4=50$. Благоприятных исходов 7, поэтому вероятность равна $\frac{7}{50}=0{,}14$.
Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-2)$. Ему соответствует формула 2, $y=x^2-2$.
График Б: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y=x+1$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x=1$. Ему соответствует формула 1, $y=\frac{3}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Выражаем массу: $m=\frac{2E}{v^2}=\frac{2\cdot 504}{12^2}=7$ кг.
Ответ: 7.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x>0$, второе — $x\le 10$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(0;10]$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n=b_1q^{n-1}$, поэтому $b_5=9\cdot 2^4=144$.
Ответ: 144.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2=AB^2+AC^2=15^2+8^2=289$. Длина положительна, поэтому $BC=17$.
Ответ: 17.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{16^2+30^2}=34$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R=34:2=17$.
Ответ: 17.

Задание 17

$S=AD\cdot BH=24\cdot 11=264$.
Ответ: 264.

Задание 18

Основание равно 6, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S=6\cdot 5=30$.
Ответ: 30.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 2 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 3 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - 25x - 50 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+2) - 25(x+2) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+2)(x^2-25) = (x+2)(x-5)(x+5) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-5;\ -2;\ 5$.
Ответ: $-5;\ -2;\ 5$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 14 км/ч, второго 14 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 30 мин. Расстояние между посёлками 77 км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\frac{1}{2}$ ч, поэтому первый двигался $t - \frac{1}{2}$ ч, второй — t ч.

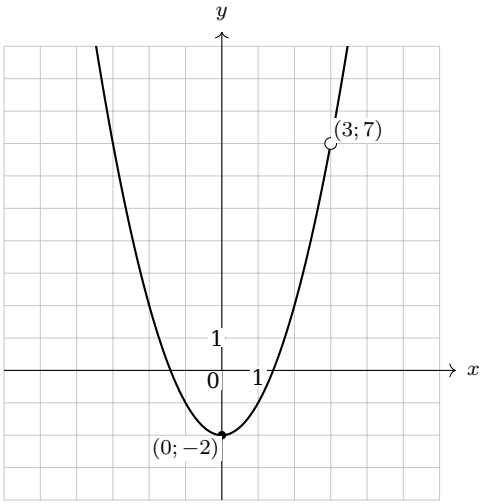
Сумма путей: $14(t - \frac{1}{2}) + 14t = 77$. Отсюда $28t = 84$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $14 \cdot 3 = 42$ км. Время движения первого $\frac{5}{2}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 42 км.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-3)(x^2-2)}{x-3}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 3$. На этой области она равна $y = x^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(0; -2)$ и выколотой точкой $(3; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -3 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN = 3$, $AC = 9$, $NC = 16$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN = x$, тогда $BC = x + 16$. По подобию $\dfrac{x}{x+16} = \dfrac{3}{9}$.
Отсюда $9x = 3(x + 16)$, то есть $6x = 48$. Получаем $BN = 8$.
Ответ: 8.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 52$, $BC = 40$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{5}{13}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{200}{13}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 52 - \dfrac{200}{13} = \dfrac{476}{13}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 40 \cdot \dfrac{\frac{476}{13}}{52} = \dfrac{4760}{169}$.

Ответ: $\dfrac{4760}{169}$.