Решения. Вариант 65

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 175, 185, 195 мм. Наибольшая из них — 195 мм.
Ответ: 195.

Задание 2

$H = 225 \cdot \dfrac{55}{100} = 123{,}75$ мм.
Ответ: 123,75.

Задание 3

Диаметр диска: $15 \cdot 25{,}4 = 381$ мм.
Высота боковины: $175 \cdot \dfrac{65}{100} = 113{,}75$ мм.
$D = 381 + 2 \cdot 113{,}75 = 608{,}5$ мм.
Ответ: 608,5.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$175 \cdot \dfrac{60}{100} - 185 \cdot \dfrac{55}{100} = 3{,}25$ мм.
Ответ: 3,25.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $16 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 175 \cdot \dfrac{60}{100} = 616{,}4$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{616{,}4 - 608{,}5}{608{,}5} \cdot 100\% \approx 1{,}3\%$.
Ответ: 1,3.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{17}{8} - \dfrac{7}{10} = \dfrac{57}{40}$.
Умножаем на 3 и получаем $4{,}275$.
Ответ: 4,275.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{329}$ приблизительно равно $18{,}138$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -7$. Из равенства получаем $x - (-7) = -\dfrac{13}{2}$.
$x = -13{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $-13 \neq 0$.
Ответ: $-13{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $10 + 36 + 4 = 50$. Благоприятных исходов 36, поэтому вероятность равна $\dfrac{36}{50} = 0{,}72$.
Ответ: $0{,}72$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1 R_2$ получаем $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \dfrac{21{,}6 \cdot 36}{36 - 21{,}6} = 54$ Ом.
Ответ: 54.

Задание 13

Нули множителей: -12 и -5. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[-12; -5]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 6 \cdot 2^3 = 48$.
Ответ: 48.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 48^2 + 20^2 = 2704$. Длина положительна, поэтому $BC = 52$.
Ответ: 52.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \dfrac{8 \cdot 10}{2} = 40$.

Ответ: 40.

Задание 18

Основание занимает 4 клеток, высота — 6 клеток. Площадь равна $\dfrac{4 \cdot 6}{2} = 12$.

Ответ: 12.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y = 3 - x$. Подставим во второе: $x^2 + (3 - x)^2 = 9$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2 - 3x = 0$.
Разложим на множители: $(x)(x - 3) = 0$. Следовательно, $x = 0$ или $x = 3$.
При $x = 0$ первое уравнение даёт $y = 3$; при $x = 3$ получаем $y = 0$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 3, сумма их квадратов равна 9.
Ответ: $(x; y) = (0; 3)$ или $(x; y) = (3; 0)$.

Задание 21

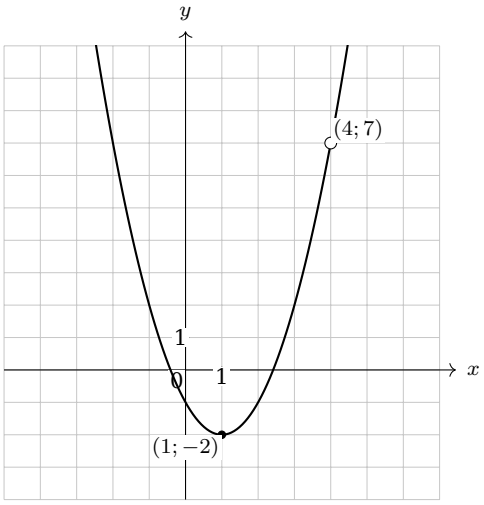
Моторная лодка прошла 66 км по течению реки и 28 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Скорость течения равна 4 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x > 4$. Скорости по течению и против течения равны $x + 4$ и $x - 4$.
Уравнение времени: $\dfrac{66}{x + 4} + \dfrac{28}{x - 4} = 5$.
После умножения на $(x + 4)(x - 4)$ и приведения получаем $5x^2 - 94x + 72 = 0$. Его корни: $x = 18$ и $x = \dfrac{4}{5}$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x > 4$. Для $x = 18$ времена равны 3 ч и 2 ч, их сумма 5 ч.
Ответ: 18 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-4)(x^2-2x-1)}{x-4}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 4$. На этой области она равна $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(1; -2)$ и выколотой точкой $(4; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -2 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 20$, $BF = 48$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{400 + 2304} = 52$.
Ответ: 52.

Задание 24

Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки K, L, M, N — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник.

По теореме о средней линии треугольника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $LM \parallel BD$, $NK \parallel BD$.
Значит, противоположные стороны $KLMN$ попарно параллельны: это параллелограмм.
Так как $AC \perp BD$, имеем $KL \perp LM$. Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 15$, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 105^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 75^\circ$, $\angle D = 60^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 75^\circ$, $\angle MCD = 60^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 45^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{15}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 45^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 15/\cos 45^\circ = 15\sqrt{2}$.

Ответ: $15\sqrt{2}$.