Решения. Вариант 66

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

баня — 6; яблони — 5; жилой дом — 3; теплица — 1.
Ответ: 6531.

Задание 2

По условию площадь площадки равна 64 м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 64 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \dfrac{64}{8} \right\rceil = 8$.
Ответ: 8.

Задание 3

Баня занимает 8 клеток, теплица — 3 клетки. Всего 11 клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $11 \cdot 4 = 44$ м^2.
Ответ: 44.

Задание 4

Ближайшие точки — верхний правый угол гаража и нижний левый угол дома.
Расстояние $\sqrt{(4 \cdot 2)^2 + (3 \cdot 2)^2} = 10$ м.
Ответ: 10.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(25000 + 38188) - (19000 + 11500) = 32688$ руб.
Газ за час: $1{,}2 \cdot 8 = 9{,}6$ руб.; электричество: $10 \cdot 5{,}5 = 55$ руб.
Экономия за час равна $45{,}4$ руб. Срок: $32688 : 45{,}4 = 720$ ч.
Ответ: 720.

Задание 6

Сумма в скобках равна $8{,}5$.
$8{,}5 : 0{,}8 = 10{,}625$.
Ответ: $10{,}625$.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{66}$ приблизительно равно $-8{,}124$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $6^{2 \cdot 2 - 2} = 6^2 = 36$.
Ответ: 36.

Задание 9

$5x = -17 - (-7) = -10$, поэтому $x = -2$.
Ответ: -2.

Задание 10

На 6 делятся числа $6, 12, \ldots, 96$; их 16. Вероятность равна $\dfrac{16}{100} = 0{,}16$.

Ответ: $0{,}16$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен 1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 1, $y = x + 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 3, $y = -3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 2, $y = 2x - 1$.
Ответ: 132.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \dfrac{2E}{v^2} = \dfrac{2 \cdot 243}{9^2} = 6$ кг.

Ответ: 6.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > -10$, второе — $x \le -2$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(-10; -2]$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_6 = 4 + (6-1) \cdot (-2) = -6$.
Ответ: -6.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 60° - 64° = 56°$.
Ответ: 56.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 17 : 2 = 8{,}5$.
Ответ: $8{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 22 \cdot 4 = 88$.
Ответ: 88.

Задание 18

Основания равны 4 и 9, высота равна 4. Площадь $S = \dfrac{4+9}{2} \cdot 4 = 26$.

Ответ: 26.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Через центр проходят только хорды, являющиеся диаметрами.
Утверждение 2 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Утверждение 3 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Ответ: 3.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-64}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \ne 2$. Разложим числитель: $x^2-64 = (x-8)(x+8)$.
Критические точки: -8, 2, 8. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -8 и 8 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-8]\cup(2;8]$.

Задание 21

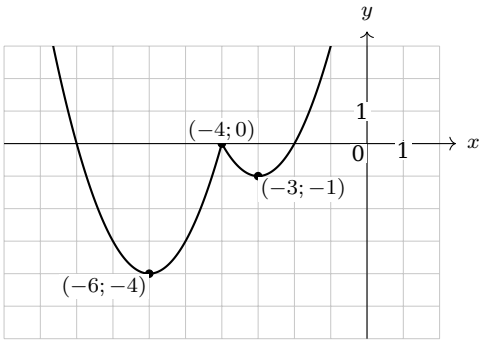
Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за 8 ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 30 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+30$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+30)$ заказа в час.
При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+30} = \dfrac{1}{8}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+30) = 8(2x+30)$.
Корни этого квадратного уравнения: $x = 10$ и $x = -24$. Отрицательный корень не подходит.
Проверка: $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{40} = \dfrac{1}{8}$, поэтому время совместной работы равно 8 ч.
Ответ: 10 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 9x + 20 - 3|x + 4|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 4$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 4t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 2t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-2; -4)$ и $(1; -1)$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -4$ пересечений нет; при $m = -4$ одно; при $-4 < m < -1$ два; при $m = -1$ три.
При $-1 < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 16$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 7$. Сторона $BC = BK + CK = 23$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(7 + 23) = 60$.
Ответ: 60.

Задание 24

Диагонали трапеции $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты: вершины B и C лежат на прямой, параллельной AD. Поэтому их площади равны.
Треугольник ABD состоит из треугольников AOB и AOD, а треугольник ACD — из треугольников COD и AOD.
Вычитая из равных площадей общую площадь AOD, получаем $S_{AOB} = S_{COD}$.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 8$, $BC = 9$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 9$ и $BH = AC = 8$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 8|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-8)^2 + 9^2$.

После раскрытия скобок получаем $16R = 145$. Поэтому $R = \dfrac{145}{16}$.

Ответ: $\dfrac{145}{16}$.