Решения. Вариант 67

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; гостиная — 6; санузел — 1; кухня — 7.
Ответ: 3617.

Задание 2

Пол кухни занимает 90 клеток, его площадь $90 \cdot 0{,}4^2 = 14{,}4$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$ м^2. Требуется $14{,}4 : 0{,}04 = 360$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{360}{8} \right\rceil = 45$ целых упаковок.
Ответ: 45.

Задание 3

На плане помещение занимает 30 клеток.
Его площадь $30 \cdot 0{,}4^2 = 4{,}8$ м^2.
Ответ: 4,8.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 90 и 30 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{90-30}{30} \cdot 100\% = 200\%$.
Ответ: 200.

Задание 5

Тариф «А»: $410 + 0 \cdot 50 = 410$ руб.
Тариф «Б»: $560 + 0 \cdot 30 = 560$ руб.
Безлимитный тариф стоит 840 руб. Наименьшая плата — 410 руб.
Ответ: 410.

Задание 6

$(-10)^2 = 100$, $9^2 = 81$. Поэтому значение выражения равно $100 - 81 = 19$.
Ответ: 19.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{257}{17}$ приблизительно равно $15{,}118$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $11 + 2\sqrt{77} + 7 - 2\sqrt{77} = 18$.
Ответ: 18.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+11)(x-4) = 0$. Корни: -11 и 4.
Требуемый корень равен 4.
Ответ: 4.

Задание 10

Исправных ламп $500 - 14 = 486$. Вероятность равна $\dfrac{486}{500} = 0{,}972$.

Ответ: $0{,}972$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 1, $y = x^2 - 2$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; 0)$. Ему соответствует формула 3, $y = -2x^2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 41$: $C = \dfrac{5}{9}(41 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (9) = 5$.

Ответ: 5.

Задание 13

$16 = 4^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 4.
Множество решений: $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

От первого до 11-го ряда число мест увеличивается 10 раз: $28 + 10 \cdot 3 = 58$.
Ответ: 58.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B = \angle C$. Их сумма равна $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, поэтому каждый равен 60°.
Ответ: 60.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 48 : 2 = 24$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $22 : 2 = 11$. Вторая сторона: $11 - 8 = 3$.
Площадь равна $8 \cdot 3 = 24$.
Ответ: 24.

Задание 18

Основание равно 4, высота равна 5. Площадь параллелограмма $S = 4 \cdot 5 = 20$.
Ответ: 20.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 3 неверно. Медиана к стороне разностороннего треугольника в общем случае не перпендикулярна этой стороне.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - 36x - 108 = 0$.

Сгруппируем слагаемые: $x^2(x+3) - 36(x+3) = 0$.
Вынесем общий множитель и применим разность квадратов: $(x+3)(x^2-36) = (x+3)(x-6)(x+6) = 0$.
Произведение равно нулю, когда хотя бы один множитель равен нулю. Получаем корни $-6;\ -3;\ 6$.
Ответ: $-6;\ -3;\ 6$.

Задание 21

Из двух посёлков одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого 15 км/ч, второго 17 км/ч. Первый сделал до встречи остановку на 45 мин. Расстояние между посёлками $84{,}75$ км. Какое расстояние до встречи проехал второй велосипедист?

Пусть до встречи прошло t ч. Остановка длилась $\dfrac{3}{4}$ ч, поэтому первый двигался $t - \dfrac{3}{4}$ ч, второй — t ч.

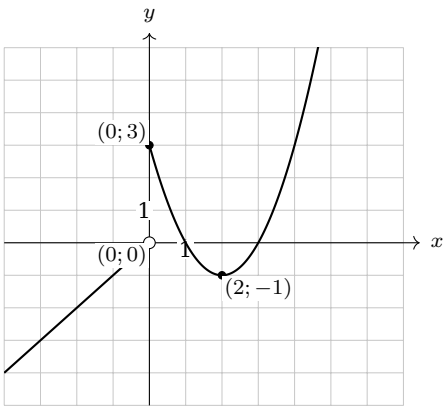
Сумма путей: $15(t - \dfrac{3}{4}) + 17t = \dfrac{339}{4}$. Отсюда $32t = 96$, то есть $t = 3$.

Второй велосипедист проехал $17 \cdot 3 = 51$ км. Время движения первого $\dfrac{9}{4}$ ч положительно; сумма обоих путей совпадает с условием.
Ответ: 51 км.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-2)^2-1, & x\geq 0,\\ x, & x<0.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(2;-1)$, оставленная при $x\geq 0$. Точка $(0;3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x$ при $x<0$. Его конечная точка $(0;0)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<0$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $0\leq m\leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(0;3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $0\leq m\leq 3$.

Задание 23

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Найдите BN, если $MN=4$, $AC=16$, $NC=17$.

Из параллельности MN и AC следует, что треугольники BMN и BAC подобны по двум углам.

Пусть $BN=x$, тогда $BC=x+17$. По подобию $\dfrac{x}{x+17}=\dfrac{4}{16}$.

Отсюда $16x=4(x+17)$, то есть $12x=68$. Получаем $BN=\dfrac{17}{3}$.

Ответ: $\dfrac{17}{3}$.

Задание 24

Из точки P, лежащей вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB. Докажите, что прямая PO делит угол APB пополам.

Радиусы к точкам касания перпендикулярны касательным, поэтому треугольники OAP и OBP прямоугольные.
У этих треугольников общая гипотенуза OP, а катеты OA и OB равны как радиусы одной окружности. Значит, треугольники равны по гипотенузе и катету.
Следовательно, $\angle APO=\angle OPB$, то есть PO является биссектрисой угла APB.

Задание 25

В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC = 68$, $BC = 64$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L, отличных от B и C. Найдите KL.

Углы BKC и BLC прямые, так как опираются на диаметр BC. Следовательно, $CK \perp AB$ и $BL \perp AC$.

Высота из A к основанию BC делит основание пополам. Поэтому $\cos B = BC/(2AB) = \dfrac{8}{17}$.

В прямоугольном треугольнике BKC получаем $BK = BC\cos B = \dfrac{512}{17}$. По симметричному рассуждению $CL = BK$. Значит, $AK = AL = 68 - \dfrac{512}{17} = \dfrac{644}{17}$.

Имеем $AK/AB = AL/AC$, поэтому $KL \parallel BC$, а треугольники AKL и ABC подобны. Следовательно, $KL = BC \cdot AK/AB = 64 \cdot \dfrac{\frac{644}{17}}{68} = \dfrac{10304}{289}$.

Ответ: $\dfrac{10304}{289}$.