Решения. Вариант 68

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Камышино — 3; Журавушка — 1; Васильково — 4.
Ответ: 314.

Задание 2

Путь занимает $5 + 12 = 17$ клеток.
Длина пути равна $17 \cdot 1 = 17$ км.
Ответ: 17.

Задание 3

Горизонтальный и вертикальный отрезки имеют длины 12 и 16 км.
По теореме Пифагора расстояние равно $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ км.
Ответ: 20.

Задание 4

От Василькова до Камышина 11 км, от Камышина до Иванова 13 км.
Время в минутах равно $\dfrac{11}{24} \cdot 60 + \dfrac{13}{15} \cdot 60 = 79{,}5$.
Ответ: $79{,}5$.

Задание 5

Васильково: $4 \cdot 56 + 0{,}5 \cdot 630 + 3 \cdot 866 = 3137$ руб.
Иваново: $4 \cdot 51 + 0{,}5 \cdot 654 + 3 \cdot 887 = 3192$ руб.
Камышино: $4 \cdot 59 + 0{,}5 \cdot 675 + 3 \cdot 857 = 3144{,}5$ руб.
Журавушка: $4 \cdot 66 + 0{,}5 \cdot 645 + 3 \cdot 842 = 3112{,}5$ руб.
Наименьшая стоимость — $3112{,}5$ руб.
Ответ: $3112{,}5$.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{3}{5} - 3 = -\dfrac{12}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем -12.
Ответ: -12.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{35}$ приблизительно равно $5{,}916$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 15$. Из равенства получаем $x - (15) = \dfrac{13}{2}$.
$x = 21{,}5$. Это значение допустимо, так как числитель $13 \neq 0$.
Ответ: $21{,}5$.

Задание 10

Всего шаров $31 + 13 + 6 = 50$. Благоприятных исходов 13, поэтому вероятность равна $\dfrac{13}{50} = 0{,}26$.
Ответ: $0{,}26$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 1. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 1$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \dfrac{3}{x}$.
График В: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
Ответ: 312.

Задание 12

$h = \dfrac{2S}{a + b} = \dfrac{2 \cdot 153}{7 + 27} = 9$.
Ответ: 9.

Задание 13

Получаем $4x > 0$. Делим на 4, сохраняя знак неравенства.
Множество решений: $(0; +\infty)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 2 \cdot 2^3 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Длина положительна, поэтому $BC = 10$.
Ответ: 10.

Задание 16

Вписанный угол ACB опирается на ту же дугу, что и указанный центральный угол. Поэтому $\angle ACB = 122^\circ : 2 = 61^\circ$.
Ответ: 61.

Задание 17

$S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BH = \dfrac{23 + 5}{2} \cdot 6 = 84$.
Ответ: 84.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 5 и 2, поэтому площадь равна $5 \cdot 2 = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 неверно. Равенство углов при основании является свойством равнобедренной трапеции, а не произвольной.
Утверждение 2 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Утверждение 3 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Ответ: 2.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{32}{x-60} + \dfrac{32}{x+60} = 1$.
Область допустимых значений: $x \neq 60$ и $x \neq -60$.
Умножим уравнение на $(x-60)(x+60)$: $32(x+60) + 32(x-60) = x^2 - 3600$.
Получим $x^2 - 64x - 3600 = 0$, или $(x-32)^2 = 4624 = 68^2$.
Поэтому $x = 32 - 68 = -36$ или $x = 32 + 68 = 100$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-36;\ 100$.

Задание 21

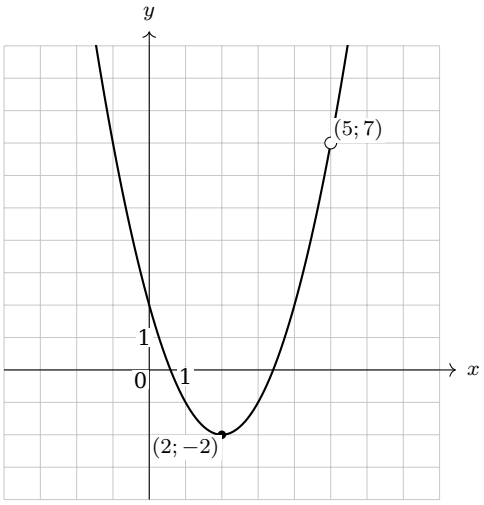
Имеются два сплава с содержанием меди 15% и 75%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 70 кг сплава, содержащего 50% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $70 - x$ кг, причём $0 < x < 70$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{15}{100}x + \dfrac{75}{100}(70 - x) = \dfrac{50}{100} \cdot 70$.
Умножим на 100: $15x + 5250 - 75x = 3500$. Поэтому $60x = 1750$ и $x = \dfrac{175}{6}$.
Это число лежит между 0 и 70, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{175}{6}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-5)(x^2-4x+2)}{x-5}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 5$. На этой области она равна $y = x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(2; -2)$ и выколотой точкой $(5; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -1 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 68, а основание равно 64. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$.
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2} \cdot 64 \cdot 60 = 1920$.
По формуле $R = \dfrac{abc}{4S}$ получаем $R = \dfrac{68 \cdot 68 \cdot 64}{4 \cdot 1920} = \dfrac{578}{15}$.
Ответ: $\dfrac{578}{15}$.

Задание 24

В треугольнике ABC стороны AB и AC равны. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что $CM = BN$.

Углы при основании равнобедренного треугольника равны: $\angle ABC = \angle BCA$.
В треугольниках MBC и NCB имеем $BM = CN$ по условию, $BC = CB$ как общую сторону и равные углы между ними: $\angle MBC = \angle NCB$.
Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому соответствующие стороны CM и BN равны.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 60$, $CD = 68$, основание $BC = 18$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 68 - 18 = 50$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 60$, $AP = BC = 18$, $PD = AD - BC = 32$.
В треугольнике CPD выполняется $60^2 + 32^2 = 68^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 60.
Площадь $S = \dfrac{50 + 18}{2} \cdot 60 = 2040$.
Ответ: 2040.