Решения. Вариант 69

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Сосновка — 1; Луговое — 3; Озёрное — 2.
Ответ: 132.

Задание 2

Складываем длины трёх участков шоссе: $22 + 10 + 24 = 56$ км.
Ответ: 56.

Задание 3

Дорога является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 32 и 24 км.
Её длина $\sqrt{32^2 + 24^2} = 40$ км.
Ответ: 40.

Задание 4

До Сосновки по шоссе 22 км, от Сосновки до Озёрного по прямой 26 км.
Время: $\dfrac{22}{60} \cdot 60 + \dfrac{26}{40} \cdot 60 = 61$ мин.
Ответ: 61.

Задание 5

Весь путь по шоссе: $\dfrac{56 \cdot 7{,}5}{100} \cdot 71 = 298{,}2$ руб.

Прямая просёлочная дорога: $\dfrac{40 \cdot 10}{100} \cdot 71 = 284$ руб.

Через Сосновку и далее мимо пруда: $\dfrac{22 \cdot 7{,}5 + 26 \cdot 10}{100} \cdot 71 = 301{,}75$ руб.

Наименьшая стоимость — 284 руб.
Ответ: 284.

Задание 6

Сумма в скобках равна $9{,}5$.
$9{,}5 : 0{,}4 = 23{,}75$.
Ответ: 23,75.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{153}$ приблизительно равно $-12{,}369$. Его положению на прямой соответствует точка C.
Ответ: 3.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{3 \cdot 2 - 5} = 2^1 = 2$.
Ответ: 2.

Задание 9

$2x = -42 - (-23) = -19$, поэтому $x = -9{,}5$.
Ответ: $-9{,}5$.

Задание 10

На 8 делятся числа $8, 16, \ldots, 48$; их 6. Вероятность равна $\frac{6}{50} = 0{,}12$.
Ответ: $0{,}12$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -2x + 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = 3x - 2$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 1, $y = 2x - 1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1 + R_2) = R_1R_2$ получаем $R_2 = \frac{RR_1}{R_1 - R}$.
$R_2 = \frac{4{,}8 \cdot 8}{8 - 4{,}8} = 12$ Ом.
Ответ: 12.

Задание 13

Нули множителей: -5 и 4. Произведение отрицательно между корнями. Корни не включаем, поскольку неравенство строгое.
Множество решений: $(-5; 4)$.
Ответ: 1.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{12} = -12 + (12 - 1) \cdot (4) = 32$.
Ответ: 32.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 40° - 40° = 100°$.
Ответ: 100.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT = \sqrt{OP^2 - OT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$.
Ответ: 24.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S = \frac{24 \cdot 20}{2} = 240$.
Ответ: 240.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство равнобедренного треугольника.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Это формула площади параллелограмма.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 80x^2 + 1024 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 80t + 1024 = 0$, то есть $(t - 16)(t - 64) = 0$.
Оба значения $t = 16$ и $t = 64$ неотрицательны. Из $x^2 = 16$ получаем $x = \pm 4$, из $x^2 = 64$ — $x = \pm 8$.
Ответ: $-8;\ -4;\ 4;\ 8$.

Задание 21

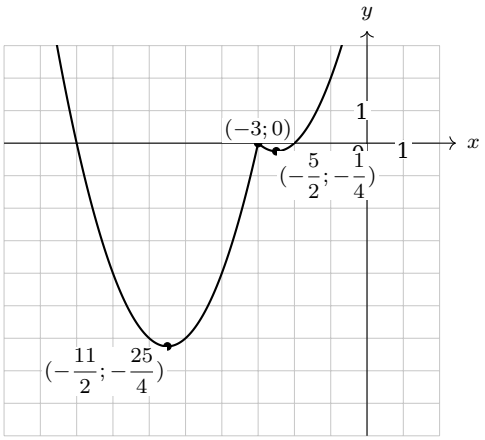
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 240 км. Скорость первого на 4 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 4$ км/ч.
По условию $\dfrac{240}{x} - \dfrac{240}{x+4} = 2$. Умножив на $x(x+4)$, получаем $960 = 2x(x+4)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 20)(x + 24) = 0$.
Корень $x = -24$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 20 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 20 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + 8x + 15 - 3|x + 3|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 3$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 5t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 1t + 0$.
Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$ и $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.
При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{1}{4}$ два; при $m = -\frac{1}{4}$ три.
При $-\frac{1}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{1}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 18 и 50. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $18 + 50 = 68$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 68 \cdot 18$ и $v^2 = 68 \cdot 50$.
Поэтому $u = 6\sqrt{34}$, $v = 10\sqrt{34}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 68 + 16\sqrt{34}$.
Ответ: $68 + 16\sqrt{34}$.

Задание 24

Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

В исходном параллелограмме $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Поэтому $AM \parallel CN$.
Из свойства середины $AM = AB/2$, $CN = CD/2$, откуда $AM = CN$.
В четырёхугольнике $AMCN$ одна пара противоположных сторон равна и параллельна. По признаку параллелограмма $AMCN$ является параллелограммом.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 11$, $MD = 8$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 64$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\dfrac{DH}{DC} = \dfrac{BD}{AD}$, откуда $DH = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{64}{11} = \dfrac{64}{11}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 11 - \dfrac{64}{11} = \dfrac{57}{11}$.
Ответ: $\dfrac{57}{11}$.