Решения. Вариант 71

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

Самое высокое значение графика интернета — 22 ГБ в месяце № 12.
Ответ: 12.

Задание 2

Лимит равен 400 минутам. Он превышен в месяцах № 2, 4, 11, 12.
Всего таких месяцев — 4.
Ответ: 4.

Задание 3

Среднее арифметическое: $\dfrac{18+12+20+22}{4}=18$ ГБ.
Ответ: 18.

Задание 4

В этом месяце израсходовано 200 минут и 14 ГБ. Сверх пакета оплачиваются 0 минут и 4 ГБ.
Плата: $530+0\cdot 2+4\cdot 70=810$ руб.
Ответ: 810.

Задание 5

За месяц № 12 использовано 500 минут и 22 ГБ.
«Основной»: $530+100\cdot 2+12\cdot 70=1570$ руб.
«Расширенный»: $770+0\cdot 2+2\cdot 50=870$ руб.
Наименьшая плата — 870 руб.
Ответ: 870.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\dfrac{21}{10}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{5}$.
Умножаем на 3 и получаем $1{,}8$.
Ответ: $1{,}8$.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{98}$ приблизительно равно $9{,}899$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. При данных значениях $x-y\neq 0$, поэтому дробь равна $x+y$.
$13+3=16$.
Ответ: 16.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq 3$. Из равенства получаем $x-(3)=\frac{5}{8}$.
$x = 3{,}625$. Это значение допустимо, так как числитель $5 \neq 0$.
Ответ: $3{,}625$.

Задание 10

Всего шаров $14 + 22 + 4 = 40$. Благоприятных исходов 22, поэтому вероятность равна $\frac{22}{40} = 0{,}55$.
Ответ: $0{,}55$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0; -1)$. Ему соответствует формула 2, $y = x^2 - 1$.
График Б: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
График В: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{1}{x}$.
Ответ: 231.

Задание 12

Подставляем $F = 140$: $C = \frac{5}{9}(140 - 32) = \frac{5}{9} \cdot (108) = 60$.
Ответ: 60.

Задание 13

$169 = 13^2$. Требуются числа, модуль которых больше 13.
Множество решений: $(-\infty; -13) \cup (13; +\infty)$.
Ответ: 3.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_4 = 4 \cdot 2^3 = 32$.
Ответ: 32.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 60^2 + 32^2 = 4624$. Длина положительна, поэтому $BC = 68$.
Ответ: 68.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 8 : 2 = 4$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
Ответ: 3.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $22 : 2 = 11$. Вторая сторона: $11 - 5 = 6$.
Площадь равна $5 \cdot 6 = 30$.
Ответ: 30.

Задание 18

Основания равны 6 и 9, высота равна 2. Площадь $S = \dfrac{6+9}{2} \cdot 2 = 15$.

Ответ: 15.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Углы равностороннего треугольника равны и в сумме дают 180 градусов.
Утверждение 2 верно. Это свойство прямоугольного треугольника с углом 30 градусов.
Утверждение 3 неверно. У ромба с острым углом 60 градусов диагонали имеют разные длины.
Ответ: 12.

Задание 20

Решите неравенство $\dfrac{x^2-81}{x-2} \le 0$.

Знаменатель не должен обращаться в нуль: $x \neq 2$. Разложим числитель: $x^2-81 = (x-9)(x+9)$.
Критические точки: -9, 2, 9. Они расположены именно в этом порядке.
На четырёх промежутках слева направо знаки дроби: минус, плюс, минус, плюс. Это можно проверить подстановкой одной точки из каждого промежутка.
Нужны промежутки с отрицательным знаком и нули числителя. Точки -9 и 9 включаем, точку 2 исключаем.
Ответ: $(-\infty;-9] \cup (2;9]$.

Задание 21

Два рабочих, работая вместе, выполняют заказ за $7{,}2$ ч. Первый рабочий, работая один, выполняет этот заказ на 6 ч быстрее второго. За сколько часов первый рабочий выполнит заказ самостоятельно?

Пусть первому рабочему требуется x ч, $x > 0$. Второму требуется $x+6$ ч. Их производительности равны $1/x$ и $1/(x+6)$ заказа в час.

При совместной работе $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+6} = \dfrac{5}{36}$. После умножения на знаменатели получаем $x(x+6) = \dfrac{36}{5}(2x+6)$.

Корни этого квадратного уравнения: $x = 12$ и $x = -\dfrac{18}{5}$. Отрицательный корень не подходит.

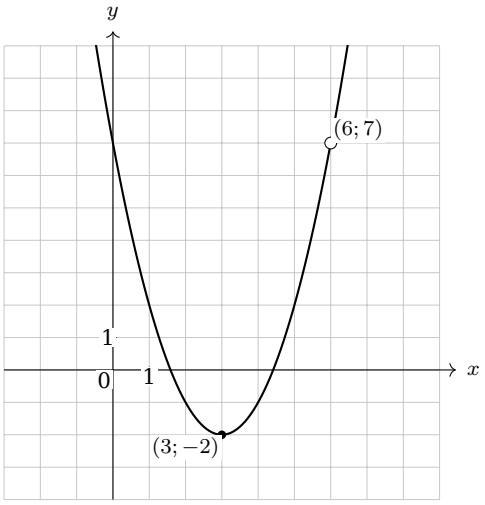
Проверка: $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{5}{36}$, поэтому время совместной работы равно $7{,}2$ ч.

Ответ: 12 ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x-6)(x^2-6x+7)}{x-6}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq 6$. На этой области она равна $y = x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2$.
Строим параболу с вершиной $(3; -2)$ и выколотой точкой $(6; 7)$.
При $m < -2$ общих точек нет. При $m = -2$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -2$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 7$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу 0 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -2$ или $m = 7$.



Ответ: $m = -2$ или $m = 7$.

Задание 23

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 8$, $CK = 17$.

Из параллельности AD и BC следует $\angle AKB = \angle KAD$. Биссектриса даёт $\angle BAK = \angle KAD$, поэтому $\angle BAK = \angle AKB$.
Треугольник ABK равнобедренный, значит, $AB = BK = 8$. Сторона $BC = BK + CK = 25$.
Периметр равен $2(AB + BC) = 2(8 + 25) = 66$.
Ответ: 66.

Задание 24

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что $\angle CC_1B_1 = \angle CBB_1$.

Углы BB_1C и BC_1C прямые. Следовательно, точки B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC.
На этой окружности углы CC_1B_1 и CBB_1 являются вписанными и опираются на одну и ту же дугу CB_1. Поэтому они равны.

Задание 25

В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, $AC = 3$, $BC = 6$.
Окружность проходит через точку A и касается прямой BC в точке B.
Найдите радиус окружности.

Пусть O — центр окружности, R — её радиус. Радиус OB перпендикулярен касательной BC, поэтому $OB \parallel AC$. Центр лежит по ту же сторону от BC, что и точка A.
Проведём из A перпендикуляр AH к прямой OB. Тогда $AH = BC = 6$ и $BH = AC = 3$.
Так как $OB = OA = R$, имеем $OH = |R - 3|$. Теорема Пифагора в треугольнике AHO даёт $R^2 = (R-3)^2 + 6^2$.

После раскрытия скобок получаем $6R = 45$. Поэтому $R = \dfrac{15}{2}$.

Ответ: $\dfrac{15}{2}$.