Решения. Вариант 73

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

В нужном столбце разрешены ширины 185, 195 мм. Наименьшая из них — 185 мм.
Ответ: 185.

Задание 2

$H = 235 \cdot \dfrac{55}{100} = 129{,}25$ мм.
Ответ: 129,25.

Задание 3

Диаметр диска: $16 \cdot 25{,}4 = 406{,}4$ мм.
Высота боковины: $185 \cdot \dfrac{65}{100} = 120{,}25$ мм.
$D = 406{,}4 + 2 \cdot 120{,}25 = 646{,}9$ мм.
Ответ: 646,9.

Задание 4

Диаметры дисков одинаковы, поэтому разность радиусов равна разности высот боковин.
$185 \cdot \dfrac{60}{100} - 195 \cdot \dfrac{55}{100} = 3{,}75$ мм.
Ответ: 3,75.

Задание 5

Диаметр нового колеса: $17 \cdot 25{,}4 + 2 \cdot 185 \cdot \dfrac{60}{100} = 653{,}8$ мм.
Длина окружности пропорциональна диаметру.
Увеличение равно $\dfrac{653{,}8 - 646{,}9}{646{,}9} \cdot 100\% \approx 1{,}1\%$.
Ответ: 1,1.

Задание 6

$(-13)^2 = 169$, $8^2 = 64$. Поэтому значение выражения равно $169 - 64 = 105$.
Ответ: 105.

Задание 7

Значение числа $\dfrac{67}{11}$ приблизительно равно $6{,}091$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

Раскрываем квадрат суммы: $7 + 2\sqrt{98} + 14 - 2\sqrt{98} = 21$.
Ответ: 21.

Задание 9

Разложение на множители: $(x+12)(x-11)=0$. Корни: -12 и 11.
Требуемый корень равен 11.
Ответ: 11.

Задание 10

Исправных ламп $500-17=483$. Вероятность равна $\dfrac{483}{500}=0{,}966$.
Ответ: $0{,}966$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;0)$. Ему соответствует формула 3, $y=-2x^2$.
График Б: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0;2)$. Ему соответствует формула 2, $y=-x^2+2$.
График В: ветви параболы направлены вверх, вершина находится в точке $(0;-1)$. Ему соответствует формула 1, $y=x^2-1$.
Ответ: 321.

Задание 12

Из формулы $R(R_1+R_2)=R_1R_2$ получаем $R_2=\dfrac{RR_1}{R_1-R}$.
$R_2=\dfrac{4{,}8\cdot 8}{8-4{,}8}=12$ Ом.
Ответ: 12.

Задание 13

Нули множителей: 1 и 12. Произведение отрицательно между корнями. Корни включаем, поскольку неравенство нестрогое.
Множество решений: $[1;12]$.
Ответ: 4.

Задание 14

От первого до 16-го ряда число мест увеличивается 15 раз: $19+15\cdot 4=79$.
Ответ: 79.

Задание 15

Углы при основании равны: $\angle B=\angle C$. Их сумма равна $180^\circ-106^\circ=74^\circ$, поэтому каждый равен 37°.
Ответ: 37.

Задание 16

Радиус OT перпендикулярен касательной PT, поэтому треугольник OTP прямоугольный.
$PT=\sqrt{OP^2-OT^2}=\sqrt{51^2-24^2}=45$.
Ответ: 45.

Задание 17

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей: $S=\dfrac{14\cdot 12}{2}=84$.
Ответ: 84.

Задание 18

Стороны прямоугольника равны 4 и 4, поэтому площадь равна $4 \cdot 4 = 16$.
Ответ: 16.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. Из равенства двух углов следует подобие; размеры треугольников могут различаться.
Утверждение 3 верно. Равенство диагоналей является свойством прямоугольника.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите уравнение $\dfrac{15}{x-20} + \dfrac{15}{x+20} = 1$.
Область допустимых значений: $x \neq 20$ и $x \neq -20$.
Умножим уравнение на $(x-20)(x+20)$: $15(x+20) + 15(x-20) = x^2 - 400$.
Получим $x^2 - 30x - 400 = 0$, или $(x-15)^2 = 625 = 25^2$.
Поэтому $x = 15 - 25 = -10$ или $x = 15 + 25 = 40$. Оба корня удовлетворяют ограничениям.
Ответ: $-10;\ 40$.

Задание 21

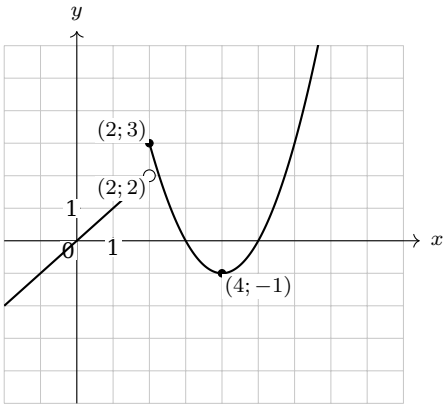
Имеются два сплава с содержанием меди 20% и 65%. Сколько килограммов первого сплава нужно взять, чтобы вместе со вторым получить 80 кг сплава, содержащего 35% меди?

Пусть масса первого сплава равна x кг. Тогда масса второго $80 - x$ кг, причём $0 < x < 80$.
Количество меди сохраняется: $\dfrac{20}{100}x + \dfrac{65}{100}(80 - x) = \dfrac{35}{100} \cdot 80$.
Умножим на 100: $20x + 5200 - 65x = 2800$. Поэтому $45x = 2400$ и $x = \dfrac{160}{3}$.
Это число лежит между 0 и 80, поэтому обе массы положительны.
Ответ: $\dfrac{160}{3}$ кг.

Задание 22

Постройте график функции $y=\begin{cases}(x-4)^2-1, & x\geq 2,\\ x, & x<2.\end{cases}$ Определите все значения m, при которых прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Первая часть — парабола с вершиной $(4;-1)$, оставленная при $x\geq 2$. Точка $(2;3)$ входит в график.
Вторая часть — луч прямой $y=x$ при $x<2$. Его конечная точка $(2;2)$ выколота.
При $m<-1$ есть одна точка на прямолинейном луче. При $m=-1$ к ней добавляется вершина параболы: всего две точки.
При $-1<m<2$ получаем две точки параболы и одну точку луча, всего три.
При $2\leq m\leq 3$ луч уже не пересекается с горизонталью, а парабола даёт две точки.
При $m>3$ остаётся только одна точка на правой ветви параболы. Верхняя граница 3 включена, поскольку точка $(2;3)$ принадлежит графику.



Ответ: $m=-1$ или $2\leq m\leq 3$.

Задание 23

В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 25, а основание равно 30. Найдите радиус описанной около него окружности.

Высота к основанию делит его пополам. По теореме Пифагора её длина $h=\sqrt{25^2-15^2}=20$.
Площадь треугольника $S=\dfrac{1}{2}\cdot 30\cdot 20=300$.
По формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$ получаем $R=\dfrac{25\cdot 25\cdot 30}{4\cdot 300}=\dfrac{125}{8}$.
Ответ: $\dfrac{125}{8}$.

Задание 24

В треугольнике ABC угол ACB тупой. Проведены высоты AA_1 и BB_1.
Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Основания высот лежат на продолжениях сторон за точку C: A_1 — на продолжении BC, B_1 — на продолжении AC.
Прямоугольные треугольники CAA_1 и CBB_1 подобны: их острые углы при C равны $180^\circ-\angle ACB$. Поэтому $CA_1/CB_1=CA/CB$.
Углы A_1CB_1 и ACB равны, так как образованы попарно противоположными лучами. Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

Задание 25

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$ и $AD > BC$, боковые стороны $AB = 60$, $CD = 65$, основание $BC = 20$. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Пусть M — середина AB. Продолжим DM до пересечения с прямой BC в точке K. При $AD > BC$ точка K лежит за B на луче CB.
Из параллельности оснований $\angle CKD = \angle ADK$, а биссектриса даёт $\angle ADK = \angle KDC$. Поэтому треугольник KCD равнобедренный и $KC = CD$.
Треугольники AMD и BMK равны по стороне и двум прилежащим углам: $AM = BM$, углы при M вертикальные, другие равны при параллельных основаниях. Следовательно, $AD = BK$.
Получаем $AD = KC - BC = 65 - 20 = 45$. Проведём $CP \parallel AB$, где $P \in AD$. Тогда $CP = AB = 60$, $AP = BC = 20$, $PD = AD - BC = 25$.
В треугольнике CPD выполняется $60^2 + 25^2 = 65^2$, поэтому угол CPD прямой. Высота трапеции равна 60.
Площадь $S = \dfrac{45 + 20}{2} \cdot 60 = 1950$.
Ответ: 1950.