Решения. Вариант 74

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

теплица — 1; сарай — 4; баня — 6; яблони — 5.
Ответ: 1465.

Задание 2

По условию площадь площадки равна 64 м^2.
Одна плитка покрывает 1 м^2, поэтому нужно 64 плиток.
Число упаковок равно $\left\lceil \frac{64}{12} \right\rceil = 6$.
Ответ: 6.

Задание 3

Дом занимает прямоугольник 5×4 клетки без выреза 3×1 клетку: $5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17$ клеток.
Одна клетка соответствует $2^2 = 4$ м^2. Площадь равна $17 \cdot 4 = 68$ м^2.
Ответ: 68.

Задание 4

Высоты построек на плане перекрываются; горизонтальный промежуток между ними составляет 4 клетки.
Расстояние равно $4 \cdot 2 = 8$ м.
Ответ: 8.

Задание 5

Разница начальных затрат: $(26500 + 33300) - (21000 + 10000) = 28800$ руб.
Газ за час: $1{,}5 \cdot 8 = 12$ руб.; электричество: $8 \cdot 6 = 48$ руб.
Экономия за час равна 36 руб. Срок: $28800 : 36 = 800$ ч.
Ответ: 800.

Задание 6

Вычисляем разность дробей: $\frac{7}{5} - \frac{11}{5} = -\frac{4}{5}$.
Умножаем на 5 и получаем -4.
Ответ: -4.

Задание 7

Значение числа $\sqrt{172}$ приблизительно равно $13{,}115$. Его положению на прямой соответствует точка A.
Ответ: 1.

Задание 8

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. При данных значениях $x - y \neq 0$, поэтому дробь равна $x + y$.
$5 + 1 = 6$.
Ответ: 6.

Задание 9

Знаменатель не должен быть равен нулю: $x \neq -5$. Из равенства получаем $x - (-5) = -\frac{1}{5}$.
$x = -5{,}2$. Это значение допустимо, так как числитель $-1 \neq 0$.
Ответ: $-5{,}2$.

Задание 10

Всего шаров $11 + 28 + 11 = 50$. Благоприятных исходов 28, поэтому вероятность равна $\frac{28}{50} = 0{,}56$.
Ответ: $0{,}56$.

Задание 11

График А: ветви параболы направлены вниз, вершина находится в точке $(0; -2)$. Ему соответствует формула 2, $y = -x^2 - 2$.
График Б: это гипербола; знак коэффициента определяется четвертями, а его модуль — значением при $x = 1$. Ему соответствует формула 1, $y = \frac{-3}{x}$.
График В: коэффициент наклона равен -1, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = -x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Выражаем массу: $m = \frac{2E}{v^2} = \frac{2 \cdot 269{,}5}{7^2} = 11$ кг.
Ответ: 11.

Задание 13

Первое неравенство даёт $x > 2$, второе — $x \leq 7$. Берём пересечение этих промежутков.
Множество решений: $(2; 7]$.
Ответ: 4.

Задание 14

$b_n = b_1 q^{n-1}$, поэтому $b_6 = 9 \cdot 3^5 = 2187$.
Ответ: 2187.

Задание 15

По теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 24^2 + 10^2 = 676$. Длина положительна, поэтому $BC = 26$.
Ответ: 26.

Задание 16

Гипотенуза равна $\sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.
Центр описанной окружности находится в середине гипотенузы, поэтому $R = 15 : 2 = 7{,}5$.
Ответ: $7{,}5$.

Задание 17

$S = AD \cdot BH = 11 \cdot 10 = 110$.
Ответ: 110.

Задание 18

Разности координат концов отрезка по горизонтали и вертикали равны 6 и 8. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство диагоналей параллелограмма.
Утверждение 2 неверно. Вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла.
Утверждение 3 неверно. Например, прямоугольные треугольники с катетами 2 и 6 и с катетами 3 и 4 имеют одинаковую площадь, но не равны.
Ответ: 1.

Задание 20

Решите уравнение $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$.

Обозначим $t = x^2$, тогда $t \geq 0$.
Получим $t^2 - 37t + 36 = 0$, то есть $(t - 1)(t - 36) = 0$.
Оба значения $t = 1$ и $t = 36$ неотрицательны. Из $x^2 = 1$ получаем $x = \pm 1$, из $x^2 = 36$ — $x = \pm 6$.
Ответ: $-6;\ -1;\ 1;\ 6$.

Задание 21

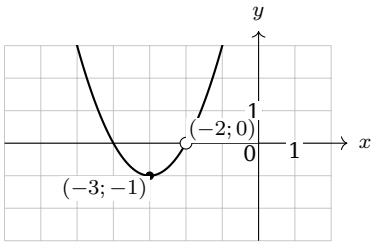
Два велосипедиста проехали один и тот же путь длиной 168 км. Скорость первого на 2 км/ч меньше скорости второго, поэтому первый затратил на путь на 2 ч больше. Найдите скорость первого велосипедиста.

Пусть скорость первого равна x км/ч, $x > 0$. Тогда скорость второго $x + 2$ км/ч.
По условию $\dfrac{168}{x} - \dfrac{168}{x + 2} = 2$. Умножив на $x(x + 2)$, получаем $336 = 2x(x + 2)$.
После деления на 2 и разложения: $(x - 12)(x + 14) = 0$.
Корень $x = -14$ отрицателен и не подходит. Значит, скорость первого равна 12 км/ч. Разность времён действительно равна 2 ч.
Ответ: 12 км/ч.

Задание 22

Постройте график функции $y = \dfrac{(x+2)(x^2+6x+8)}{x+2}$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Функция определена при $x \neq -2$. На этой области она равна $y = x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1$.
Строим параболу с вершиной $(-3; -1)$ и выколотой точкой $(-2; 0)$.
При $m < -1$ общих точек нет. При $m = -1$ имеется одна точка — вершина.
При $m > -1$ горизонтальная прямая обычно пересекает параболу дважды. При $m = 0$ одна из этих точек выколота, а вторая имеет абсциссу -4 и сохраняется.
Следовательно, ровно одна общая точка получается при $m = -1$ или $m = 0$.



Ответ: $m = -1$ или $m = 0$.

Задание 23

Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки 16 и 25. Найдите периметр треугольника.

Гипотенуза равна $16 + 25 = 41$. Обозначим катеты u и v.
Из подобия треугольников, образованных высотой, следует: $u^2 = 41 \cdot 16$ и $v^2 = 41 \cdot 25$.
Поэтому $u = 4\sqrt{41}$, $v = 5\sqrt{41}$. Складывая катеты и гипотенузу, получаем $P = 41 + 9\sqrt{41}$.
Ответ: $41 + 9\sqrt{41}$.

Задание 24

Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

Точка M лежит вне окружности. У треугольников общий угол при M. Для выпуклого вписанного четырёхугольника возможны два порядка точек на секущих.
Если порядок точек M, B, A и M, C, D, то $\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle CDA = \angle MDA$. Здесь использовано, что противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны.
Если порядок точек M, A, B и M, D, C, то $\angle MBC = \angle ABC = 180^\circ - \angle CDA = \angle MDA$.
В обоих случаях две пары углов равны, поэтому треугольники подобны.

Задание 25

На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M. Известно, что $AD = 7$, $MD = 3$. Точка H — точка пересечения высот треугольника. Найдите AH.

Угол BMC прямой, так как опирается на диаметр BC. В прямоугольном треугольнике BMC отрезок MD является высотой к гипотенузе.
По подобию треугольников BMD и MCD имеем $BD \cdot DC = MD^2 = 9$.
Треугольники BDH и ADC прямоугольные. Углы DBH и DAC равны, поскольку их стороны соответственно перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны.
Следовательно, $\frac{DH}{DC} = \frac{BD}{AD}$, откуда $DH = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{9}{7} = \frac{9}{7}$.
Ортоцентр остроугольного треугольника лежит внутри него, значит, $AH = AD - DH = 7 - \frac{9}{7} = \frac{40}{7}$.
Ответ: $\frac{40}{7}$.