Решения. Вариант 75

Материалы для проверки. В заданиях 1–19 приведены вычисления и пояснения к ответам; в заданиях 20–25 — развёрнутые решения.

Задание 1

кладовая — 3; санузел — 1; коридор — 2; спальня — 4.
Ответ: 3124.

Задание 2

Пол кухни занимает 90 клеток, его площадь $90 \cdot 0{,}5^2 = 22{,}5$ м^2.
Площадь одной плитки: $0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$ м^2. Требуется $22{,}5 : 0{,}0625 = 360$ плиток.
Нужно $\left\lceil \dfrac{360}{10} \right\rceil = 36$ целых упаковок.
Ответ: 36.

Задание 3

На плане помещение занимает 125 клеток.
Его площадь $125 \cdot 0{,}5^2 = 31{,}25$ м^2.
Ответ: 31,25.

Задание 4

Помещения занимают соответственно 99 и 44 клеток.
Увеличение относительно меньшего помещения равно $\dfrac{99-44}{44} \cdot 100\% = 125\%$.
Ответ: 125.

Задание 5

Тариф «А»: $420 + 4 \cdot 55 = 640$ руб.
Тариф «Б»: $570 + 0 \cdot 35 = 570$ руб.
Безлимитный тариф стоит 855 руб. Наименьшая плата — 570 руб.
Ответ: 570.

Задание 6

Сумма в скобках равна 8,8.
$8{,}8 : 0{,}4 = 22$.
Ответ: 22.

Задание 7

Значение числа $-\sqrt{405}$ приблизительно равно $-20{,}125$. Его положению на прямой соответствует точка D.
Ответ: 4.

Задание 8

При возведении степени в степень показатели перемножаются, при делении степеней с одинаковым основанием — вычитаются: $2^{3 \cdot 2 - 3} = 2^3 = 8$.
Ответ: 8.

Задание 9

$4x = 9 - (-13) = 22$, поэтому $x = 5{,}5$.
Ответ: 5,5.

Задание 10

На 7 делятся числа $7, 14, \ldots, 98$; их 14. Вероятность равна $\dfrac{14}{100} = 0{,}14$.
Ответ: $0{,}14$.

Задание 11

График А: коэффициент наклона равен -2, а точка пересечения с осью y имеет ординату -2. Ему соответствует формула 2, $y = -2x - 2$.
График Б: коэффициент наклона равен 3, а точка пересечения с осью y имеет ординату -1. Ему соответствует формула 1, $y = 3x - 1$.
График В: коэффициент наклона равен 2, а точка пересечения с осью y имеет ординату 2. Ему соответствует формула 3, $y = 2x + 2$.
Ответ: 213.

Задание 12

Подставляем $F = 95$: $C = \dfrac{5}{9}(95 - 32) = \dfrac{5}{9} \cdot (63) = 35$.
Ответ: 35.

Задание 13

$121 = 11^2$. Требуются числа, модуль которых не меньше 11.
Множество решений: $(-\infty; -11] \cup [11; +\infty)$.
Ответ: 2.

Задание 14

$a_n = a_1 + (n-1)d$, поэтому $a_{18} = 4 + (18 - 1) \cdot (-7) = -115$.
Ответ: -115.

Задание 15

Сумма углов треугольника равна $180°$. Поэтому $\angle C = 180° - 69° - 44° = 67°$.
Ответ: 67.

Задание 16

Перпендикуляр из центра к хорде делит её пополам, поэтому $HB = 30 : 2 = 15$.
В прямоугольном треугольнике OHB получаем $OH = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.
Ответ: 8.

Задание 17

Сумма соседних сторон равна $36 : 2 = 18$. Вторая сторона: $18 - 9 = 9$.
Площадь равна $9 \cdot 9 = 81$.
Ответ: 81.

Задание 18

Основание занимает 5 клеток, высота — 4 клеток. Площадь равна $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$.
Ответ: 10.

Задание 19

Утверждение 1 верно. Это свойство касательной к окружности.
Утверждение 2 неверно. У прямоугольника со сторонами 2 и 3 диагонали не перпендикулярны.
Утверждение 3 верно. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.
Ответ: 13.

Задание 20

Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 29. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим $y = 7 - x$. Подставим во второе: $x^2 + (7 - x)^2 = 29$.
После раскрытия скобок и деления на 2 получаем $x^2 - 7x + 10 = 0$.
Разложим на множители: $(x - 2)(x - 5) = 0$. Следовательно, $x = 2$ или $x = 5$.
При $x = 2$ первое уравнение даёт $y = 5$; при $x = 5$ получаем $y = 2$.
Обе пары удовлетворяют исходной системе: сумма координат равна 7, сумма их квадратов равна 29.
Ответ: $(x; y) = (2; 5)$ или $(x; y) = (5; 2)$.

Задание 21

Моторная лодка прошла 72 км по течению реки и 20 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения равна 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки.

Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Для движения против течения необходимо $x > 2$. Скорости по течению и против течения равны $x + 2$ и $x - 2$.
Уравнение времени: $\dfrac{72}{x + 2} + \dfrac{20}{x - 2} = 4$.
После умножения на $(x + 2)(x - 2)$ и приведения получаем $4x^2 - 92x + 88 = 0$. Его корни: $x = 22$ и $x = 1$.
Второй корень не удовлетворяет условию $x > 2$. Для $x = 22$ времена равны 3 ч и 1 ч, их сумма 4 ч.
Ответ: 22 км/ч.

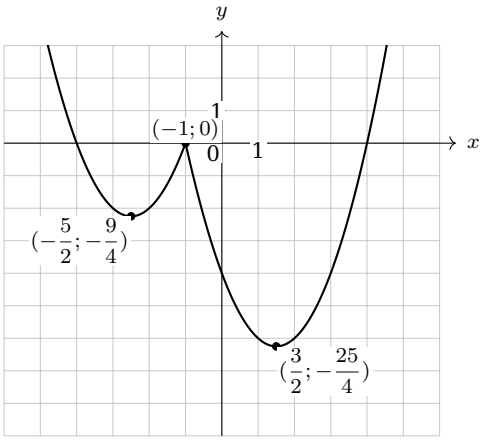
Задание 22

Постройте график функции $y = x^2 + x - 4|x + 1|$. Определите все значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Положим $t = x + 1$. При $t < 0$ получаем $y = t^2 + 3t + 0$, при $t \geq 0$ — $y = t^2 - 5t + 0$. Вершины ветвей имеют координаты по переменной t: $(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{4})$ и $(\frac{5}{2}; -\frac{25}{4})$. В точке $t = 0$ обе части дают $y = 0$.

При $m < -\frac{25}{4}$ пересечений нет; при $m = -\frac{25}{4}$ одно; при $-\frac{25}{4} < m < -\frac{9}{4}$ два; при $m = -\frac{9}{4}$ три.

При $-\frac{9}{4} < m < 0$ пересечений четыре. При $m = 0$ центральная точка общая для обеих частей и считается один раз, поэтому получается три точки. При $m > 0$ остаются две внешние точки.



Ответ: $m = -\frac{9}{4}$ или $m = 0$.

Задание 23

В трапеции $ABCD$, $AD \parallel BC$, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке F. Известно, что $AF = 15$, $BF = 20$. Найдите боковую сторону AB.

Углы при боковой стороне трапеции дополнительны: $\angle A + \angle B = 180^\circ$.
По свойству биссектрис $\angle FAB + \angle FBA = 90^\circ$. Следовательно, $\angle AFB = 90^\circ$.
По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{225 + 400} = 25$.
Ответ: 25.

Задание 24

Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Докажите, что эти биссектрисы перпендикулярны.

В параллелограмме $AD \parallel BC$, поэтому $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$.
Биссектрисы делят эти углы пополам: $\angle KAB + \angle KBA = 90^\circ$.
Из суммы углов треугольника ABK следует $\angle AKB = 90^\circ$. Значит, биссектрисы перпендикулярны.

Задание 25

Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 17$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

Все вершины лежат на окружности с центром M, а AD — её диаметр. По выпуклости вершины B и C находятся на одной полуокружности между A и D.

Противоположные углы вписанного четырёхугольника дополнительны: $\angle A = 80^\circ$, $\angle D = 70^\circ$.

Треугольники AMB и CMD равнобедренные. Поэтому $\angle ABM = 80^\circ$, $\angle MCD = 70^\circ$. Получаем $\angle MBC = \angle BCM = 30^\circ$.

Опустим из M перпендикуляр MT на BC. В равнобедренном треугольнике BMC он делит основание пополам, поэтому $BT = \dfrac{17}{2}$.

В прямоугольном треугольнике BMT радиус $MB = BT/\cos 30^\circ$. Следовательно, $AD = 2MB = 17/\cos 30^\circ = \dfrac{34\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{34\sqrt{3}}{3}$.